Предисловие

Дорогие десятиклассники!

Вы держите в руках вторую, практическую часть учебника для изучения курса алгебры и начал математического анализа в 10 классе, первая часть — теоретическая. Обе части неотделимы друг от друга:

— нельзя изучить курс, пользуясь только первой частью и не решая задачи из второй;

— нельзя изучить курс, пользуясь только второй частью, не изучая теорию.

Во всех параграфах представлены упражнения трёх уровней сложности. Первый — устные и полуустные упражнения; второй — задания средней трудности (слева от номеров таких заданий поставлен значок «○»); третий — задания повышенной трудности (слева от номеров таких заданий помещён значок ●). К большинству упражнений второго и третьего уровней в конце книги приведены ответы.

Прежде чем решать упражнения из того или иного параграфа второй части, откройте первую часть и прочитайте материал соответствующего параграфа. А ещё лучше — положите первую часть рядом с собой и посматривайте в неё в случае возникших затруднений, тем более что для многих упражнений даны непосредственные ссылки на соответствующие места в первой части учебника. Такие ссылки обозначаются значком, в котором указан номер страницы учебника.

123

Желаем вам успехов!

Авторы

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1. Дано числовое множество

$$A = \left\{-2\frac{2}{3}; -2; -\sqrt{3}; -0{,}2(3);\ 0;\ 0{,}23;\ 1;\ \frac{\sqrt{2}}{2}; \pi; 4\right\}.$$

Составьте множество:

а) $A \cap N$; в) $A \cap Z$;

б) $A \cap Q$; г) $A \cap I$,

где N, Z, Q, I – соответственно множества натуральных чисел, целых чисел, рациональных чисел, иррациональных чисел.

2. Укажите неверное утверждение:

а) Множество целых чисел является подмножеством множества действительных чисел.

б) Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел равно множеству действительных чисел.

в) Множество целых чисел включается в множество натуральных чисел.

г) Множество рациональных чисел включает в себя множество натуральных чисел.

3. Из чисел 124, 345, 570, 288, 441 и 729 укажите числа, кратные:

а) 2; б) 3; в) 5; г) 10.

4. Назовите делители числа:

а) 24; б) 54; в) 75; г) 90.

5. а) Число n кратно 3. Докажите, что число $4n$ кратно 12.

б) Число m кратно 7. Докажите, что число $2m$ кратно 14.

Докажите, что:

6. а) $23^6 + 23^7$ кратно 24; в) $37^8 - 37^7$ кратно 18;

б) $10^5 + 5^7$ делится на 19; г) $72^2 + 6^5$ делится на 30.

7. а) $3\,456\,728\,496 \vdots 4$; в) $26\,354\,981\,175 \vdots 25$;

б) $473\,928\,375 \vdots 125$; г) $1\,736\,907\,064 \vdots 8$.

8. Найдите натуральное число x, про которое известно, что оно:
а) больше 5246, но меньше 5256 и при этом делится на 6;
б) больше 6864, но меньше 6872 и при этом делится на 9;
в) больше 9347, но меньше 9362 и при этом делится на 15;
г) больше 7572, но меньше 7590 и при этом делится на 18.

9. Найдите все такие натуральные числа n, при которых является натуральным числом выражение:

а) $\dfrac{3n + 7}{n}$; в) $\dfrac{7n + 27}{n}$;

б) $\dfrac{3n + 14}{n + 2}$; г) $\dfrac{8n + 77}{2n + 1}$.

10. Разложите на простые множители числа:
а) 95 256; б) 968 000; в) 444 528; г) 178 200.

11. Найдите остаток от деления числа:
а) 43 215 436 на 10; в) 1 234 567 на 9;
б) 1 234 321 на 3; г) 3 456 785 на 6.

12. Назовите все остатки, которые могут получиться при делении на число: а) 5; б) 7; в) 4; г) 10.

13. Составьте формулу натурального числа, которое:
а) при делении на 5 даёт остаток 4;
б) при делении на 7 даёт остаток 3;
в) при делении на 11 даёт остаток 7;
г) при делении на 6 даёт остаток 1.

14. В числе 23□47 заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:
а) делилось на 3;
б) делилось на 9.

15. В числе 3423□ заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:
а) делилось на 3 и на 2;
б) делилось на 3 и на 4.

16. В числе 7345□ заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:
а) при делении на 9 давало в остатке 2;
б) при делении на 5 давало в остатке 3;
в) при делении на 25 давало в остатке 7;
г) при делении на 11 давало в остатке 10.

17. Найдите наибольший общий делитель (НОД) чисел:
а) 154 и 210; в) 105 и 165;
б) 240, 360 и 900; г) 144, 216 и 324.

18. Найдите наименьшее общее кратное (НОК) чисел:

а) 120 и 144; в) 132 и 242;

б) 255, 510 и 153; г) 156, 195 и 390.

19. Найдите НОД и НОК чисел:

а) 84 и 56; в) 96 и 144;

б) 66, 99 и 132; г) 39, 65 и 156.

20. Найдите НОД и НОК чисел:

а) $2^{14} \cdot 3^7$ и $2^{11} \cdot 3^{15}$;

б) $2^{20} \cdot 5^{13} \cdot 7^7$ и $2^{11} \cdot 5^{14} \cdot 7^6$;

в) $2^{124} \cdot 3^7$ и $2^{111} \cdot 5^5$;

г) $2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{16}$; $2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{26}$ и $2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$.

21. Выпишите в порядке возрастания все пятизначные числа, в десятичную запись которых входят пять разных цифр: 3; 4; 6; 8 и 9.

22. Придумайте какой-либо квадратный трёхчлен, между корнями которого заключено ровно 77 натуральных чисел.

23. Какой процент среди трёхзначных чисел составляют полные квадраты?

24. Какое наименьшее количество различных трёхзначных чисел нужно взять, чтобы среди них наверняка было бы одно число:

а) оканчивающееся не на нуль;

б) со средней цифрой нуль;

в) без нулей в их десятичной записи?

25. Вычислите:

а) $\dfrac{5^{-4} \cdot 15^6}{(3^{-5})^{-2}}$; в) $\dfrac{3^5 \cdot 6^{-6}}{(2^3)^{-4}}$;

б) $\dfrac{4^3 \cdot 14^{-3}}{7^{-5} \cdot 2^7}$; г) $\dfrac{8^{-3} \cdot 10^5}{5^6 \cdot 2^{-2}}$.

26. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{m^6(m^{-2})^5}{m^{-3}m^7}$ при $m = 0{,}5$;

б) $\dfrac{a^{-3}b^{-5}(a^2b)^{-1}}{(a^{-3})^2b^{-4}}$ при $a = 15$, $b = 5$;

в) $\dfrac{n^{-5}(n^{-1})^{-9}}{n^{-4}n^{10}}$ при $n = 10$;

г) $\dfrac{(cd^3)^{-2}c^{-8}}{(c^{-5})^2(d^{-3})^3}$ при $c = 6,\ d = 3$.

27. Сравните значения выражений:

а) $\sqrt{192}$ и $\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}} - \dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}$;

б) $3 + 2\sqrt{2}$ и $\sqrt{7} + \sqrt{10}$;

в) $\sqrt{198}$ и $\dfrac{1}{5\sqrt{2}-7} - \dfrac{1}{5\sqrt{2}+7}$;

г) $2\sqrt{5} + 3$ и $\sqrt{10} + \sqrt{19}$.

28. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})^2} + 3\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2}$;

в) $\sqrt{(2\sqrt{15} - 3\sqrt{7})^2} - 3\sqrt{7}$;

г) $\sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{10} - 4)^2}$.

Решите уравнение:

29. а) $x^2 + 6x = 0$; в) $24 - 6x^2 = 0$;
б) $-3x^2 = 18x$; г) $5x^2 - 30 = 0$.

30. а) $6x^2 - 13x - 15 = 0$; в) $9x^2 + 40x + 16 = 0$;
б) $-5x^2 - 27x + 56 = 0$; г) $-3x^2 + 16x + 75 = 0$.

31. Решите уравнение методом введения новой переменной:

а) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$; б) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$;
в) $2(x^2 - 1)^2 - 13(x^2 - 1) - 24 = 0$;
г) $(x^2 - 4x)^2 + 9(x^2 - 4x) + 20 = 0$.

32. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2 + 2x - 63}{49 - x^2}$; в) $\dfrac{8x - x^2}{x^2 - 3x - 40}$;

б) $\dfrac{6x^2 + x}{6x^2 - 17x - 3}$; г) $\dfrac{5x^2 - 12x + 4}{25x^2 - 4}$.

33. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{b}{b-3}-\frac{b}{b+3}-\frac{b^2+9}{9-b^2}\right)\cdot\frac{(3-b)^2}{3b+b^2}$;

б) $\frac{y^2+5y}{(y-5)^2}:\left(\frac{5}{y+5}+\frac{y^2+25}{y^2-25}-\frac{5}{5-y}\right)$.

34. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $\frac{c+5}{c^2-64}:\left(\frac{4}{c+8}-\frac{12}{c^2+16c+64}\right)+\frac{4}{8-c}$;

б) $\left(\frac{4}{x-7}+\frac{14}{x^2-14x+49}\right)\cdot\frac{x^2-49}{2x-7}-\frac{7x-21}{x-7}$.

35. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{x}{x^2-2x+1}-\frac{x+2}{x^2+x-2}\right)\cdot\frac{1}{(2x-2)^{-2}}$;

б) $\left(\frac{y+2}{y^2-y-6}-\frac{y}{y^2-6y+9}\right)^{-1}:(3y-9)^2$.

36. Докажите тождество:

а) $\left(\frac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}\right):\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+1$;

б) $\frac{1+\sqrt{a}}{1-a}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)=1-\sqrt{a}$.

37. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{x-2}-\frac{5}{x+2}=\frac{10-x}{x^2-4}$;

б) $\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2-3x}=\frac{3x-7}{3-x}$.

в) $\frac{6}{x^2-4x+3}-\frac{13-7x}{1-x}=\frac{3}{x-3}$;

г) $\frac{8}{x^2-6x+8}+\frac{1-3x}{2-x}=\frac{4}{x-4}$.

38. Решите уравнение методом введения новой переменной:

а) $\frac{3}{x^2-2x-2}-x^2+2x=0$;

б) $\frac{x}{x^2-2}+\frac{6(x^2-2)}{x}=7$;

в) $1-\frac{15}{(x^2-4x)^2}=\frac{2}{x^2-4x}$;

г) $\dfrac{x-3}{x^2+10x+27}+\dfrac{x^2+10x+27}{x-3}=-2.$

Решите иррациональное уравнение:

39. а) $\sqrt{x+4}=3$; в) $\sqrt{3x-1}=2\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{\dfrac{x+7}{x+2}}=3$; г) $\sqrt{\dfrac{2x-8}{6-x}}=2$.

40. а) $\sqrt{x^2-5x}=6$; в) $\sqrt{x^2+6x}=4$;

б) $\sqrt{x^2-5x+5}=1$; г) $\sqrt{x^2+5x+2}=4$.

41. а) $\sqrt{x}=2-x$; в) $\sqrt{x+2}=x$;

б) $\sqrt{7-x}=x-1$; г) $\sqrt{12-x}=x$.

42. а) $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}=1$;

б) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$;

в) $\sqrt{x+6}-2\sqrt{x-2}=1$;

г) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-5}$.

43. а) $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$; в) $\sqrt{2x^2+8x+1}-x=3$;

б) $x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1$; г) $x+\sqrt{2x^2-8x+1}=3$.

44. Решите уравнение методом введения новой переменной:

а) $x^2+2x-2\sqrt{x^2+2x}=3$;

б) $x^2+6x+24=10\sqrt{x^2+6x}$.

в) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$;

г) $\dfrac{3}{\sqrt{x+1}+1}+2\sqrt{x+1}=5$.

45. Решите уравнение:

а) $x^2 - 5(\sqrt{x})^2 - 6 = 0$; в) $x^2 + (\sqrt{x-3})^2 - 9 = 0$;

б) $x^2 + \sqrt{(x+1)^2} - 3 = 0$; г) $x^2 + \sqrt{(x-3)^2} - 9 = 0$.

Решите неравенство:

46. а) $2 + 5x > -3$; в) $\dfrac{2+x}{10} > \dfrac{3x-1}{15}$;

б) $1 - 2x \leqslant 3$; г) $\dfrac{3x-1}{8} > \dfrac{3-5x}{20}$.

47. а) $x^2 - 7x + 12 > 0$; в) $3x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$;

б) $-x^2 + 3x + 4 \geqslant 0$; г) $-2x^2 + x + 1 < 0$.

48. а) $x^2 - 81 \leqslant 0$; в) $121 \leqslant x^2$;

б) $-x^2 > 4x$; г) $x^2 - 2x < 0$.

49. а) $4x^2 - 12x + 9 > 0$; в) $9x^2 - 6x + 1 \leqslant 0$;

б) $-2x^2 + x - 1 < 0$; г) $x^2 - 2x + 5 < 0$.

50. а) $x(x+7)(3-6x) \geqslant 0$; б) $(2x-1)(4-12x)(x+9) < 0$.

51. а) $\dfrac{x^2+9}{4x^2-1} < 0$; б) $\dfrac{10}{1-100x^2} < 0$.

52. а) $\dfrac{x^2}{x-2} \geqslant 0$; б) $\dfrac{x+2}{(x-4)^2} \geqslant 0$.

53. а) $\dfrac{x-2}{x^2+2x-8} > 0$; б) $-\dfrac{x+4}{x^2+6x+8} > 0$.

Решите систему неравенств:

54. а) $\begin{cases} 15x + 60 < 0, \\ -42 - 6x \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -28 - 4x \leqslant 0, \\ 5x + 35 \leqslant 0. \end{cases}$

55. а) $\begin{cases} x^2 - x - 56 < 0, \\ x + 4 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 10 < 0, \\ x^2 - 2x - 63 \geqslant 0. \end{cases}$

56. Автобус-экспресс отправился от автовокзала в аэропорт, находящийся от автовокзала на расстоянии 40 км. Через 10 мин вслед за автобусом выехал пассажир на такси. Скорость такси на 20 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорость такси и скорость автобуса, если в аэропорт они прибыли одновременно.

57. Велосипедист проехал 30 км от города до турбазы. На обратном пути он ехал 2 ч с той же скоростью, а затем на 3 км/ч быстрее и затратил на обратный путь на 6 мин меньше, чем на путь из города до турбазы. Какое время затратил велосипедист на обратный путь?

58. Поезд должен был пройти 54 км. Пройдя 14 км, он был задержан у семафора на 10 мин. Увеличив после этого скорость на 10 км/ч, он прибыл на вокзал с опозданием на 2 мин. Найдите первоначальную скорость поезда.

59. Расстояние между городами равно 44 км. Из этих городов навстречу друг другу выходят одновременно два пешехода и встречаются через 4 ч. Если бы первый вышел на 44 мин раньше второго, то их встреча произошла бы в середине пути. С какой скоростью идёт каждый пешеход?

60. Велосипедист проехал 96 км на 2 ч быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 км больше, чем намеревался проезжать за 1 ч 15 мин. С какой скоростью ехал велосипедист?

61. Два парохода одновременно вышли из порта: один на север, другой на восток. Через 2 ч расстояние между ними оказалось равным 60 км. Найдите скорость каждого парохода, зная, что скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого.

62. Члены школьного кружка натуралистов отправились на катере собирать лекарственные травы. Проплыв вниз по течению реки 35 км, они сделали трёхчасовую остановку, после чего вернулись назад. Определите скорость катера в стоячей воде, если всё путешествие заняло 7 ч, а скорость течения реки равна 3 км/ч.

63. Турист проплыл на байдарке 24 км по озеру и 9 км против течения реки за то же время, какое понадобилось ему, чтобы проплыть по течению 45 км. С какой скоростью плыл турист по озеру, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

64. Моторная лодка прошла 7 км по течению реки и 10 км против течения, затратив на путь по течению на 0,5 ч меньше, чем на путь против течения. Собственная скорость лодки равна 12 км/ч. Найдите скорость хода лодки против течения.

65. Два велосипедиста одновременно выехали из пункта A в одном и том же направлении. Скорость первого на 2 км/ч больше скорости второго. Через 12 мин первый велосипедист остановился на 6 мин, чтобы устранить неисправность, и, возобновив движение, догнал второго велосипедиста на расстоянии 14 км от места своей остановки. Определите скорость велосипедистов.

66. От пристани A до пристани B, расстояние между которыми 10 км, вниз по течению реки отправился плот. Через некоторое время вслед за ним отправился катер, который догнал плот через 15 мин и тут же, не меняя своей скорости, повернул обратно. Известно, что плот причалил к пристани B на 54 мин позже, чем катер к пристани A. Найдите собственную скорость катера и время движения плота до момента начала движения катера от пристани A, если скорость течения реки 2 км/ч, а собственная скорость движения катера больше 10 км/ч.

67. Колонне автомашин было дано задание перевезти со склада в речной порт 60 т груза. В связи с неблагоприятной погодой на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, и поэтому колонну дополнили ещё четырьмя машинами. Сколько машин было в колонне первоначально?

68. Для перевозки 180 туристов было заказано несколько автобусов. Однако два автобуса не прибыли, а туристов приехало на 8 человек больше, чем ожидалось. Поэтому пришлось в каждом автобусе разместить на 17 человек больше, чем предполагалось. Сколько туристов было размещено в каждом автобусе?

69. Бригада должна была изготовить 120 изделий к определённому сроку. Однако она изготовляла в день на 2 изделия больше, чем предполагалось по плану, и поэтому закончила работу на 3 дня раньше срока. Сколько изделий в день должна была изготовлять бригада по плану?

70. Аквариум объёмом 54 м^3 заполняется при помощи двух кранов. При этом первый кран работает 3 ч, а второй — 2 ч. Какова пропускная способность первого крана, если 1 м^3 он заполняет на 1 мин медленнее, чем второй?

71. Два комбайна, работая совместно, могут выполнить задание за 6 ч. Первый комбайн, работая один, может выполнить это задание на 5 ч быстрее, чем второй комбайн. За какое время может выполнить задание первый комбайн, работая один?

72. Два экскаватора, работая одновременно, выполнят некоторый объём земляных работ за 3 ч 45 мин. Один экскаватор, работая отдельно, может выполнить этот объём работ на 4 ч быстрее, чем другой. Сколько времени требуется каждому экскаватору в отдельности для выполнения того же объёма земляных работ?

73. Два тракториста, работая совместно, вспахали поле за 48 ч. Если бы половину поля вспахал один из них, а затем оставшуюся половину другой, то работа была бы выполнена за 100 ч. За сколько часов мог бы вспахать поле каждый тракторист, работая отдельно?

74. Двое рабочих вместе могут справиться с заданием за 2 ч. Если один из них сделает 40 % задания, а затем второй — оставшуюся часть работы, то на выполнение задания понадобится 4 ч. За какое время сможет выполнить всё задание каждый рабочий, действуя в одиночку, если известно, что производительность труда у них различная?

75. Университет в течение двух лет увеличивал количество принятых студентов на один и тот же процент. На сколько процентов увеличивался приём студентов ежегодно, если количество поступивших возросло с 2000 человек до 2880?

76. В сплав золота с серебром, содержащий 80 г золота, добавили 100 г золота. В результате содержание золота в сплаве увеличилось на 20 %. Сколько граммов серебра в сплаве?

77. В сплав меди и цинка, содержащий 5 кг цинка, добавили 15 кг цинка, после чего содержание цинка в сплаве повысилось на 30 %. Какова первоначальная масса сплава, если известно, что в нём меди было больше, чем цинка?

78. Слиток сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45 % меди. Какую массу меди надо добавить к этому куску, чтобы полученный сплав содержал 60 % меди?

79. Имеются два слитка, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый слиток массой 150 кг содержит 40 % олова, а второй массой 250 кг — 26 % меди. Процентное содержание цинка в обоих слитках одинаково. Сплавив первый и второй слитки, получили сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Сколько килограммов олова содержится в полученном сплаве?

80. После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена одной упаковки лекарства снизилась с 300 до 192 р. На сколько процентов снижалась цена одной упаковки лекарства каждый раз?

81. Население посёлка за два года увеличилось с 20 000 до 22 050 человек. Найдите средний ежегодный процент роста населения города.

82. Первоначальная цена на некоторый товар была повышена на 44%, затем 2 раза понижалась на одинаковое число процентов. В результате окончательная цена товара оказалась на 19% меньше первоначальной. На сколько процентов производилось двукратное снижение цены?

83. Первый банк даёт 5% годовых, а второй — 10%. Вкладчик часть своих денег положил в первый банк, а остальные — во второй. Через 2 года суммарное число вложенных денег увеличилось на 18,85%. Какую долю своих денег положил вкладчик в первый банк?

Найдите область определения функции

84. а) $y = \sqrt{3 - 9x}$; в) $y = \sqrt{36 - x^2}$;

б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{5x + 3}}$; г) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 - 8x}}$.

85. а) $y = \sqrt{(x^2 + 7x + 12)^{-1}}$; в) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$;

б) $y = \sqrt{-x^2 - 11x - 28}$; г) $y = \sqrt{-x^2 + 2x - 1}$.

86. а) $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 2}}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 2}}$.

87. а) $y = \dfrac{\sqrt{25 - x^2}}{x + 2}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x + 3}}{x^2 - 16}$.

88. Найдите, при каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{3 - 5x - 2x^2}}{7x}$; в) $\dfrac{\sqrt{2 - 5x - 3x^2}}{9x}$;

б) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - x - 14}}{2x + 5}$; г) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 4x - 15}}{7 - 2x}$.

89. а) При каких значениях q уравнение $x^2 - 7x + q = 0$ имеет два корня? Укажите такое наибольшее целое значение q.
б) При каких значениях a уравнение $ax^2 + 5x + 15 = 0$ не имеет корней?

90. а) Найдите наименьшее целое значение p, при котором разность дробей $\frac{3-p}{4}$ и $\frac{5-2p}{18}$ отрицательна.
б) Найдите наибольшее целое значение k, при котором сумма дробей $\frac{5-2k}{4}$ и $\frac{9+2k}{6}$ положительна.

91. Найдите значение k, при котором квадратное уравнение:
а) $5x^2 - kx + 5 = 0$ имеет два корня;
б) $3x^2 + 2kx - (k - 6) = 0$ имеет корни;
в) $3x^2 + 2kx + 12 = 0$ не имеет корней;
г) $2x^2 - kx + k + 6 = 0$ имеет не более одного корня.

92. Квадратичная функция задана уравнением:
а) $y = 12 - 3x^2$;
б) $y = 0{,}5(x - 2)^2$;
в) $y = -(x - 1)^2 + 4$;
г) $y = 2x^2 - 4x + 5$.

Не выполняя построения графика, определите:
1) координаты вершины параболы;
2) ось симметрии параболы;
3) промежутки возрастания и убывания функции;
4) наибольшее либо наименьшее значение функции;
5) множество значений функции.

93. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на данном промежутке:
а) $y = 2x^2 + 4x - 6$ на отрезке $[-3; -1]$;
б) $y = -\frac{1}{3}(x + 4)^2$ на отрезке $[-7; -4]$;
в) $y = 3x^2 - 6$ на луче $[-1; +\infty)$;
г) $y = -2x^2 + 8x$ на интервале $(0; 4)$.

94. Решите графически систему уравнений:
а) $\begin{cases} y = (x + 3)^2 - 3, \\ y = x + 6; \end{cases}$
б) $\begin{cases} y = -x^2 - 4x, \\ y = (x + 1)^2 - 1; \end{cases}$
в) $\begin{cases} y = 2x + 5, \\ y = -x^2 + 8x - 3; \end{cases}$
г) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 6, \\ y = -(x - 4)^2 + 2. \end{cases}$

95. Функция задана формулой:

а) $y = \frac{1}{x} + 4$; в) $y = -\frac{2}{x-5}$;

б) $y = -\frac{4}{x-3} + 5$; г) $y = \frac{3}{x+1} - 2$.

Не выполняя построения графика, найдите:
1) область определения функции;
2) множество значений функции;
3) промежутки монотонности функции;
4) координаты центра симметрии гиперболы;
5) асимптоты гиперболы.

96. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном промежутке:

а) $y = -\frac{6}{x}$ на луче $[1; +\infty)$;

б) $y = \frac{4}{x+1}$ на отрезке $[0; 3]$;

в) $y = \frac{8}{x} - 2$ на отрезке $[-4; -1]$;

г) $y = -\frac{4}{x-3} + 1$ на полуинтервале $(3; 7]$.

97. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = -0{,}5x^2 + 2x + 1, \\ y = \frac{5}{x+1}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = -\frac{6}{x} + 1, \\ y = x^2 - 2x - 4. \end{cases}$

98. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = \sqrt{x}$ на луче $[4; +\infty)$;

б) $y = -\sqrt{x+2}$ на отрезке $[0; 3]$;

в) $y = -\sqrt{x} + 4$ на полуинтервале $(0; 4]$;

г) $y = \sqrt{x-3} + 1$ на отрезке $[6; 9]$.

99. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5, \\ y = \sqrt{x-3} - 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = -\sqrt{x+1} - 1, \\ y = \frac{2}{x-1}. \end{cases}$

100. Постройте график функции:

а) $y = |x|$; в) $y = -|x - 2|$;

б) $y = |x - 3| + 1$; г) $y = 2 - |x|$.

101. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = |x|$ на отрезке $\left[-\sqrt{2};\ 1\right]$;

б) $y = -|x + 4|$ на отрезке $\left[-\sqrt{2};\ 1\right]$;

в) $y = -|x| + 5$ на отрезке $\left[-1;\ \sqrt{3}\right]$;

г) $y = |x - 1| - 3$ на отрезке $\left[2;\ \sqrt{5}\right]$.

102. Решите графически уравнение:

а) $|x - 2| - 4 = 0$; в) $3 - |x + 1| = 0$;

б) $|x + 3| = 5$; г) $|x - 4| = 3$.

103. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x^2}$; в) $y = \sqrt{(x - 3)^2}$;

б) $y = \sqrt{x^2 + 10x + 25}$; г) $y = -\sqrt{x^2 - 8x + 16}$.

104. Постройте график функции $y = f(x)$ и опишите её свойства, если:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{6}{x}, \text{ если } 2 < x \leqslant 6; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{x + 1}, \text{ если } x < -1, \\ -3x^2 + 3, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

105. а) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 - 5x + 6$. При каком значении x выполняется равенство $f(x + 1) = f(x - 3)$?

б) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \dfrac{1}{x}$. При каком значении x выполняется равенство $f(x^2 - 1) = f(3x^2 - 3x)$?

106. а) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + 7x + 12$. При каких значениях x выполняется неравенство $f(x + 3) > f(0)$?
б) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 - 4x + 3$. При каких значениях x выполняется неравенство $f(x - 1) \leqslant f(1)$?

Постройте график уравнения:

107. а) $x^2 + y^2 = 1$; в) $x^2 + (y + 2)^2 = 25$;

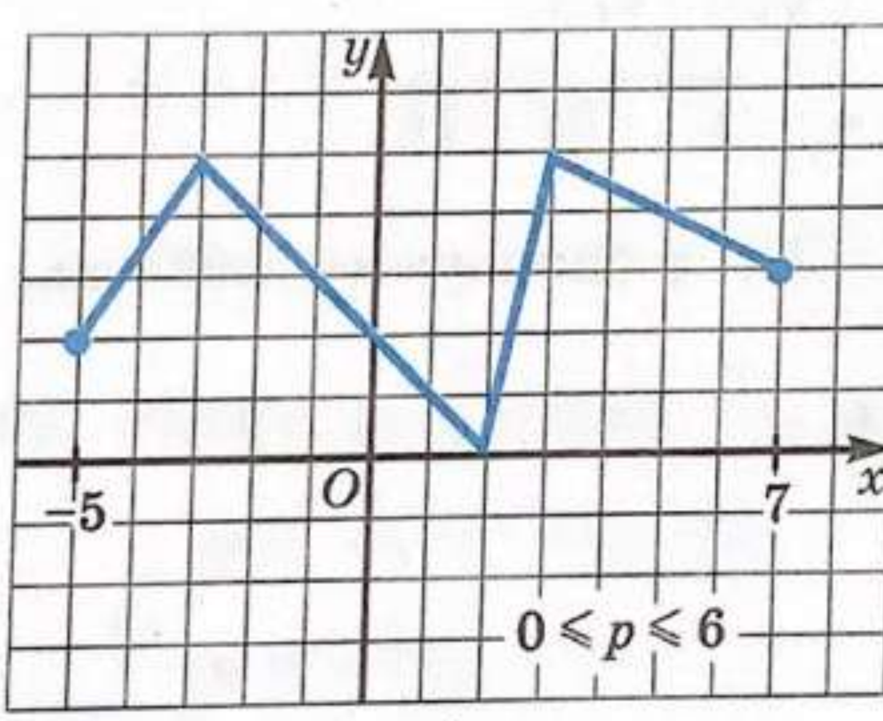
б) $(x - 1)^2 + y^2 = 9$; г) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

108. а) $(xy - 6)\left(\sqrt{x + 4} + y\right) = 0$; в) $(2x + y)(x^3 - y - 1) = 0$;

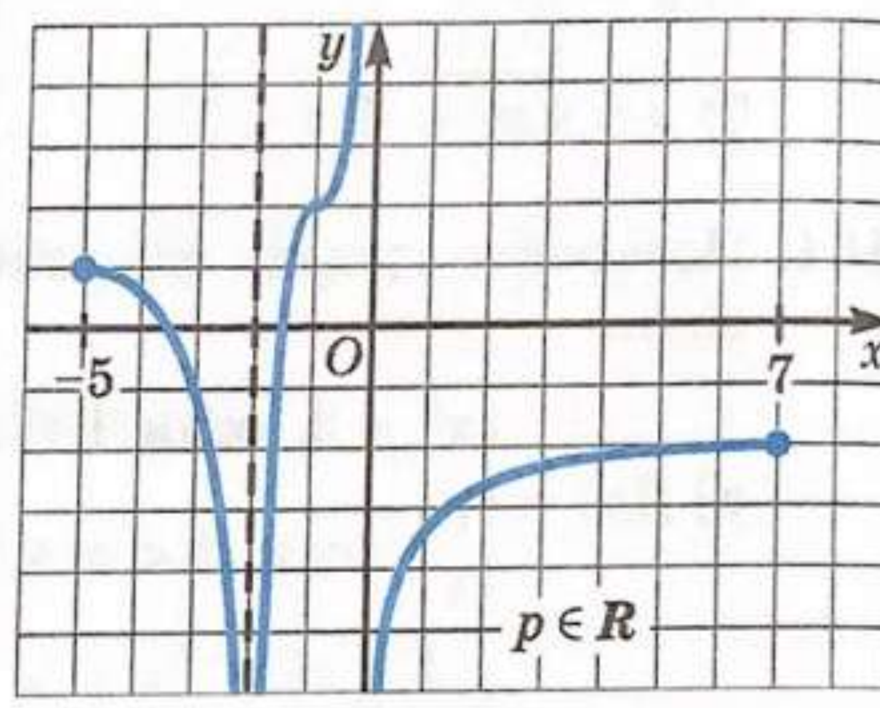
б) $\left(\sqrt{x^2} - y\right)(x^2 - 4x + y) = 0$; г) $(y - x)(x + 4) = 0$.

109. На каждом рисунке ниже на отрезке $[-5; 7]$ изображён график функции $y = f(x)$. В некоторых случаях функция $y = f(x)$ не определена в одной или нескольких точках данного отрезка. Рассмотрите данный график и определите:

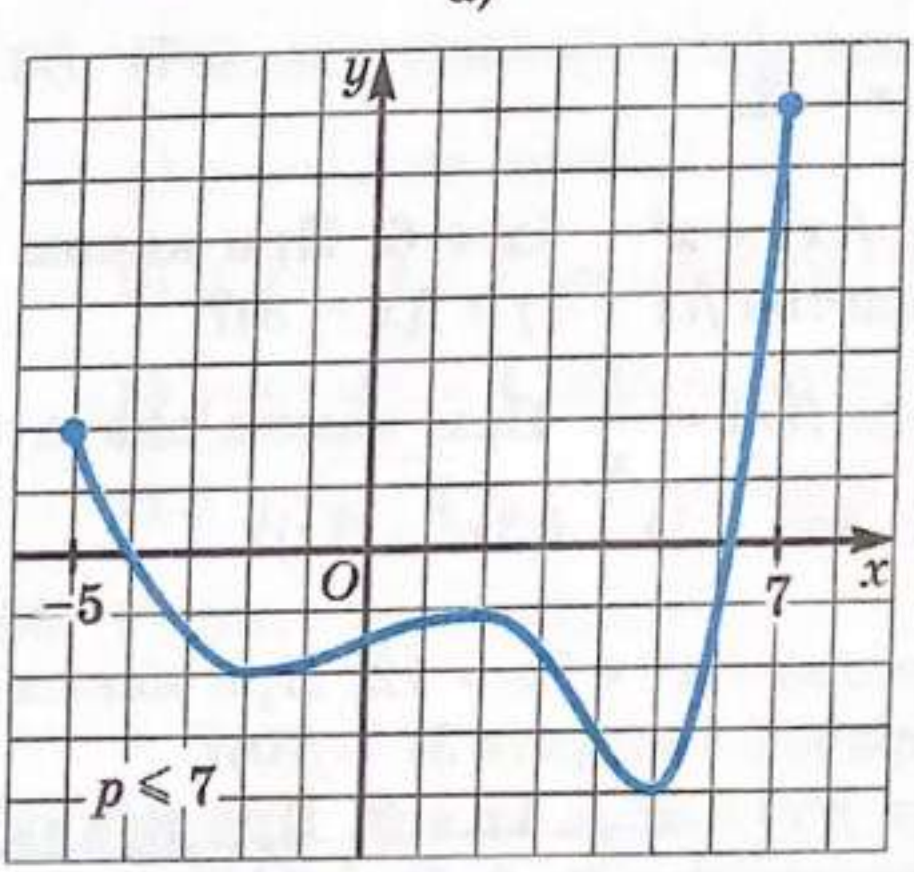
1) возрастает ли функция на отрезке $[-5; 7]$;
2) убывает ли функция на отрезке $[-5; 7]$;
3) сколько корней имеет уравнение $f(x) = p$ (значения p указаны на рисунке);
4) промежутки монотонности функции $y = f(x)$;



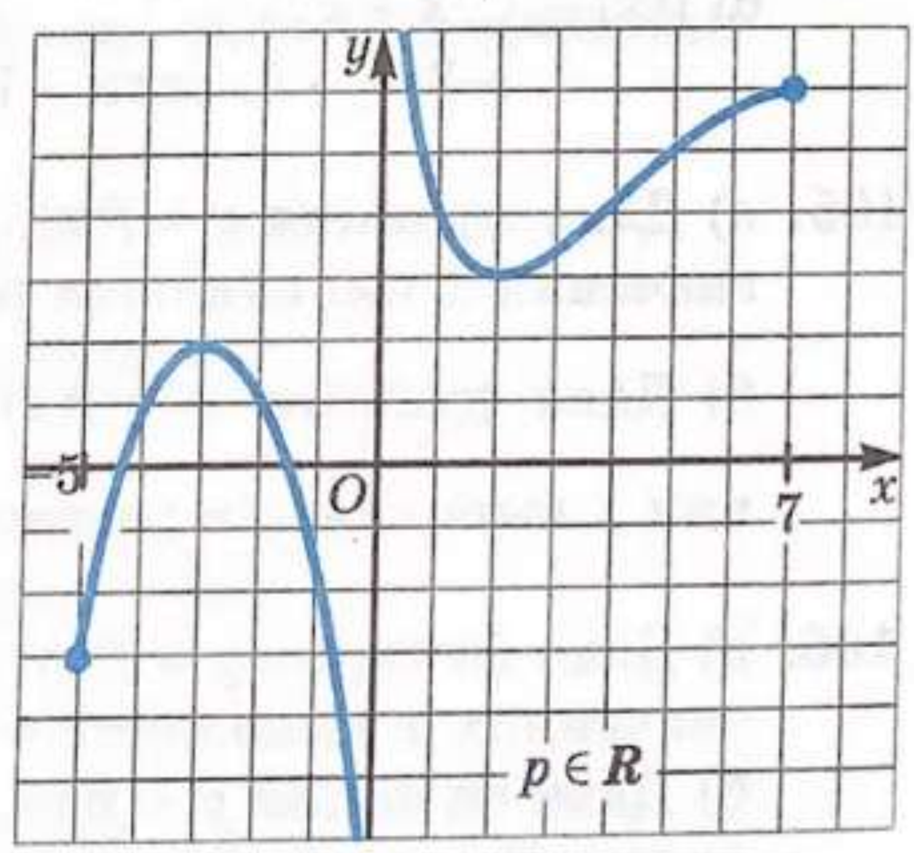
а)



б)



в)



г)

110. Укажите последовательность чисел, которая является арифметической прогрессией.

1) 2; 3; 5; 8; ...   3) 2; 4; 8; 16; ...
2) 2; −2; −6; −10; ...   4) 2; −1; 10; −7; 18; ...

111. Укажите последовательность чисел, которая является геометрической прогрессией.

1) 2; 3; 5; 8; ...   3) 16; 8; 4; 2; ...
2) 2; −2; −6; −10; ...   4) 2; −1; 10; −7; 18; ...

112. а) Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите a_8, если $a_1 = \frac{2}{3}$, $d = -\frac{1}{3}$.

б) Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите a_9, если $a_1 = -\frac{1}{4}$, $d = \frac{3}{4}$.

113. а) Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите b_4, если $b_1 = -3$, $q = \frac{1}{2}$.

б) Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите b_6, если $b_1 = \sqrt{2}$, $q = -\sqrt{2}$.

114. а) Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -18$, $a_{10} = 18$.

б) Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -4$, $b_6 = \frac{1}{8}$.

115. а) Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_{18} = -9{,}6$, $d = 0{,}8$.

б) Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите b_1, если $b_8 = 512$, $q = 2$.

116. а) Найдите сумму первых 25 членов арифметической прогрессии (a_1), если $a_1 = 18$, $d = -2$.

б) Найдите сумму первых пяти членов конечной геометрической прогрессии, если $b_1 = 6$, $q = 3$.

117. а) Укажите номер данного члена арифметической прогрессии $2; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \ldots$, если $a_n = -4$.

б) Укажите номер данного члена геометрической прогрессии 4; 12; 36; ..., если $b_n = 972$.

118. а) Определите, начиная с какого номера все члены данной арифметической прогрессии $-14; -11{,}5; -9; \ldots$ положительны.

б) Определите, начиная с какого номера все члены данной арифметической прогрессии $28; 26{,}5; 25; \ldots$ отрицательны.

119. а) Найдите число членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 6$, $q = 3$, $S_n = 726$.

б) Найдите число членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 128$, $q = \frac{1}{2}$, $b_n = \frac{1}{4}$.

120. Между числами 7 и 448 вставьте положительное число так, чтобы получилось три последовательных члена геометрической прогрессии.

121. Найдите значение p, при котором числа $p - 5$, $\sqrt{7p}$, $p + 4$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

122. Клиент положил в банк 30 000 р. с ежеквартальным начислением 3 % сроком на полтора года. Какая сумма по вкладу будет им получена в конце срока?

123. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если к первому из них прибавить 25, второе оставить без изменения, а третье разделить на 3, то получатся три числа арифметической прогрессии. Найдите данные числа, если второе число равно 60.

1 ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

ГЛАВА

§ 1 НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Прочитайте п. 1 в § 1 учебника (часть 1).

6

1.1. а) Сколько существует натуральных чисел, меньших 100 и делящихся на 2?

б) Сколько существует натуральных чисел, меньших 100 и делящихся на 3?

в) Сколько существует натуральных чисел, меньших 100 и делящихся на 6?

г) Сколько существует натуральных чисел, меньших 100 и делящихся на 27?

1.2. Может ли среди 103 идущих подряд натуральных чисел быть ровно одно, делящееся:

а) на 52; б) на 51; в) на 103; г) на 10 003?

○1.3. Найдите какие-нибудь 36 идущих подряд трёхзначных чисел, среди которых нет ни одного, кратного 37. Какое наименьшее и какое наибольшее значение может принимать наименьшее из этих 36 трёхзначных чисел?

1.4. Может ли произведение 103 идущих подряд натуральных чисел не делиться:

а) на 103; б) на 618; в) на 642; г) на 3193?

Докажите утверждение:

○1.5. а) Если каждое из натуральных чисел n и m делится на натуральное число p, то $(n + m) \vdots p$ и $(n - m) \vdots p$.*

б) Если каждое из натуральных чисел n и m делится на натуральное число p, а x, y — произвольные натуральные числа, то $(nx \pm my) \vdots p$.

в) Если натуральное число n делится на натуральное число p, а натуральное m не делится на p, то ни сумма $n + m$, ни разность $n - m$ не делятся на p.

---

* Здесь и далее: если натуральное число n делится на натуральное число p, то принято писать $n \vdots p$.

г) Если сумма натуральных чисел и каждое её слагаемое, кроме последнего, делятся на некоторое натуральное число p, то и это последнее слагаемое делится на p.

○**1.6.** а) Если $n \vdots p$, то $(n \cdot m) \vdots p$ для любого натурального m.

б) Если $x \vdots 5$, то $3x \vdots 15$.

в) Если $x \vdots 7$ и $y \vdots 3$, то $(xy + 14y) \vdots 21$.

г) Если $x \vdots 17$ и $y \vdots 4$, то $(2xy - 34y) \vdots 136$.

Докажите, что:

1.7. а) Сумма двух чётных чисел есть чётное число;

б) сумма двух нечётных чисел есть чётное число;

в) сумма чётного и нечётного числа есть нечётное число;

г) если x, y — произвольные натуральные числа, то $xy(x + y)$ и $xy(x - y)$ — чётные числа.

1.8. а) Разность квадратов любых натуральных различных чисел делится на их сумму и на их разность;

б) разность любых натуральных различных чисел является делителем разности их кубов.

○**1.9.** а) Если $a + b$ делится на c, а $a - b$ не делится на c, то ни a, ни b не делятся на c;

б) $ad + bc + ac + bd$ делится на $a + b$;

в) если $ad + bc$ делится на $a + b$, то и $ac + bd$ делится на $a + b$;

г) если $ad + bc$ не делится на $a + b$, то и $ac + bd$ не делится на $a + b$.

1.10. Объясните, почему не существует натуральных чисел a и b таких, что:

а) $152a + 134b = 12\,345$; б) $150a + 135b = 1234$.

○**1.11.** Найдите все натуральные числа x и y такие, что:

а) $7x + 12y = 50$; в) $5x - y = 17$;

б) $11x + 18y = 98$; г) $5x - 11y = 137$.

○**1.12.** Докажите, что:

а) $72^3 + 34^3$ делится на 106;

б) $(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 181^3 + 182^3)$ делится на 183;

в) $18^3 + 26^3$ делится на 176;

г) $(2^3 + 3^3 + ... + 196^3 + 197^3)$ делится на 199.

○**1.13.** а) Число $14a + 11b$ не делится на 5; докажите, что и $9a + b$ не делится на 5.

б) Число $17a + 29b$ не делится на 13; докажите, что и $4a + 3b$ не делится на 13.

○**1.14.** Найдите все такие натуральные числа n, при которых:

а) выражение $\frac{5n + 4}{n}$ является натуральным числом;

б) выражение $\frac{5n + 4}{n + 3}$ является натуральным числом;

в) выражение $\frac{7n + 12}{n}$ является натуральным числом;

г) выражение $\frac{7n + 11}{n - 5}$ является натуральным числом.

○**1.15.** Найдите все такие натуральные числа n, при которых заданное выражение является натуральным числом:

а) $\frac{5n^2 + 7n - 12}{n}$; б) $\frac{n^7 + 3n^2 + 36}{n^2}$.

○**1.16.** На графике заданной функции найдите все точки, обе координаты которых — целые числа:

а) $y = 2 + \frac{4}{x + 3}$; б) $y = \frac{5x + 17}{x + 7}$.

○**1.17.** При каком наименьшем натуральном значении параметра a на графике заданной функции есть ровно одна точка, координатами которой являются натуральные числа? Найдите координаты этой точки:

а) $y = \frac{a}{x + 1}$; б) $y = \frac{a}{x + 113}$.

○**1.18.** Известно, что при некотором значении a число $b = a + \frac{2}{a}$ — целое. Будет ли целым число:

а) $a^2 + \frac{4}{a^2}$; б) $a^3 + \frac{8}{a^3}$?

○**1.19.** Найдите все значения a, при которых x и y являются натуральными числами:

а) $x = \frac{4}{a} + 3$, $y = \frac{8}{a} + a$; б) $x = \frac{3}{a} + 3$, $y = \frac{9}{a} + 2a$.

●**1.20.** При каких значениях параметра a уравнение имеет два различных натуральных корня:

а) $ax^2 - (2a^2 + 5)x + 10a = 0$;

б) $ax^2 - (a^2 + 5)x + 3a - 5 = 0$?

●**1.21.** Найдите все целочисленные значения параметра a, при которых оба корня уравнения — целые числа:

а) $x^2 + ax + \frac{4}{a - 4} = 0$;

б) $(a + 2)x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 5a - 4 = 0$.

1.22. Найдите последнюю цифру числа:

а) 2^{1047}; в) 7^{1799};
б) 3^{1641}; г) 9^{1861}.

○**1.23.** Найдите последнюю цифру числа:

а) $2001^{2002^{2003}}$; в) $1345^{6789^{12345}}$;
б) $1999^{2002^{1333}}$; г) $23\,456^{78\,901^{2345}}$.

○**1.24.** Существуют ли такие натуральные числа n и k, что последняя цифра разности указанных двух степеней равна нулю:

а) $627^n - 833^k$; б) $834^n - 626^k$?

○**1.25.** Докажите, что произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 13$ делится на $(1 + 2 + 3 + ... + 13)$, а произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 16$ не делится на $(1 + 2 + 3 + ... + 16)$.

9 **Прочитайте п. 2 в § 1 учебника*.**

●**1.26.** а) Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $n^3 - n$ делится на 6, то и число $(n + 1)^3 - (n + 1)$ также делится на 6.

б) Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $n^3 + 5n$ делится на 6, то и число $(n + 1)^3 + 5(n + 1)$ также делится на 6.

в) Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $7^n + 3n - 1$ делится на 9, то и число $7^{n+1} + 3(n + 1) - 1$ также делится на 9.

г) Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $3^{2n+2} - 8n - 9$ делится на 64, то и число $3^{2n+4} - 8(n + 1) - 9$ также делится на 64.

○**1.27.** Докажите, что:

а) произведение двух идущих подряд натуральных чисел делится на 2;

б) произведение трёх идущих подряд натуральных чисел делится на 3 и на 6;

в) произведение четырёх идущих подряд натуральных чисел делится на 4, на 12 и на 24;

г) произведение пяти идущих подряд натуральных чисел делится на 5, на 20 и на 120.

1.28. В числе 23 □ 47 заполните пропуск такой цифрой, чтобы:

а) число делилось на 3; б) число делилось на 9.

---

* Здесь и далее — см. Часть 1.

1.29. В числе 233 $\square$ 4 заполните пропуск такой цифрой, чтобы:
а) число делилось на 4; б) число делилось на 12.

1.30. В числе 735 $\square$ 4 заполните пропуск такой цифрой, чтобы:
а) число при делении на 3 давало в остатке 2;
б) число при делении на 4 давало в остатке 2.

1.31. В числе 7345 $\square$ заполните пропуск такой цифрой, чтобы:
а) число при делении на 9 давало в остатке 2;
б) число при делении на 25 давало в остатке 7.

о1.32. Рассмотрите два предложения:
а) сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел делится на 3;
б) сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 5 тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел делится на 5.
Докажите, что из этих утверждений верно только одно.

Прочитайте п. 3 в § 1 учебника. 14

1.33. Найдите все простые числа, меньшие:
а) 50; б) 100.

1.34. Найдите все составные числа, меньшие:
а) 50; б) 100.

1.35. Выпишите все пары взаимно простых составных чисел из отрезка натурального ряда 1, 2, 3, ..., 20.

•1.36. Докажите, что: а) наименьший отличный от 1 делитель натурального числа n, большего 1, есть простое число;
б) наименьший отличный от 1 делитель составного числа n не больше $\sqrt{n}$;
в) если $p_1 < p_2 < ... < p_n$ — простые числа, то число $p_1p_2 ... p_n + 1$ является либо простым числом, либо делится на простое число p, большее чем p_n;
г) простых чисел бесконечно много.

о1.37. Докажите, что:
а) любое натуральное число либо взаимно просто с заданным простым числом p, либо делится на p;
б) если произведение нескольких множителей делится на простое число p, то хотя бы один из множителей делится на p.

о1.38. Докажите, что среди данных последовательных натуральных чисел нет ни одного простого числа:
а) $23! + 2$, $23! + 3$; $23! + 4$, ..., $23! + 23$;

б) $101! + 2$, $101! + 3$; $101! + 4$, ... , $101! + 101$.

в) Сколько составных чисел в каждой серии а) и б)?

г) Выпишите 1 000 000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого.

○**1.39.** Найдите простые числа p и q, если известно, что корни уравнения $x^2 - px + q = 0$ — натуральные числа.

○**1.40.** Найдите все простые числа p и q такие, что:

а) $5p + 17q = 140$; б) $7p + 3q = 86$.

15 **Прочитайте п. 4 в § 1 учебника.**

1.41. Составьте формулу натурального числа, которое:

а) при делении на 5 даёт остаток 4;

б) при делении на 11 даёт остаток 7;

в) при делении на 7 даёт остаток 2;

г) оканчивается числом, делящимся на 15.

1.42. Найдите остаток от деления на 10 числа:

а) 1234; б) 43 215 432.

1.43. Число x при делении на 8 даёт остаток 5. Чему может быть равен остаток от деления числа x:

а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 6?

1.44. Докажите, что:

а) остаток от деления натурального числа на 2 равен остатку от деления его последней цифры на 2;

б) остаток от деления натурального числа на 5 равен остатку от деления его последней цифры на 5.

1.45. Докажите, что:

а) остаток от деления натурального числа на 4 равен остатку от деления на 4 числа, образованного его двумя последними цифрами;

б) остаток от деления натурального числа на 25 равен остатку от деления на 25 числа, образованного его двумя последними цифрами.

1.46. Найдите остаток от деления на 3 числа:

а) 1 234 321; б) 55 555 155 555.

1.47. Найдите остаток от деления на 9 числа:

а) 1 234 567; б) 55 555 155 555.

17 **Прочитайте п. 5 в § 1 учебника.**

1.48. Найдите НОД и НОК чисел:

а) 154 и 210; в) 255 и 510;

б) 120 и 144; г) 105 и 165.

1.49. Найдите НОД и НОК чисел:
а) $2^{32} \cdot 3^4 \cdot 11^{31}$ и $2^{23} \cdot 3^7 \cdot 11^{14}$;
б) $4^{24} \cdot 6^{14} \cdot 9^8$ и $8^{18} \cdot 10^{17} \cdot 12^{16}$.

Прочитайте п. 6 в § 1 учебника.

20

1.50. Составьте разложение на простые множители числа:
а) 504; б) 8281; в) 108 000; г) 12 321.

1.51. Найдите число делителей числа:
а) 24; б) 504; в) 180; г) 60.

1.52. Полагают по определению, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ (символ $n!$ читают *n-факториал*), а $1! = 1$. С каким показателем входит число 2 в разложение на простые множители числа:
а) 10!; б) 20!; в) 40!; г) 100!?

1.53. С каким показателем входит число 5 в разложение на простые множители числа:
а) 10!; б) 20!; в) 40!; г) 100!?

1.54. Сколькими нулями оканчивается число:
а) 10!; б) 20!; в) 40!; г) 100!?

1.55. Не пользуясь калькулятором, определите, является ли данное число квадратом или кубом некоторого натурального числа:
а) 75 625; б) 614 656; в) 31 104; г) 216 000.

1.56. Сколько делителей имеет данное число:
а) 315; в) 250 000;
б) 9450; г) 623 700?

Найдите все пары целых чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющих уравнению:

1.57. а) $2y - x = 15$; в) $7x + 4y = 123$;
б) $6x - y = 25$; г) $5x - 7y = 23$.

1.58. а) $yx = 15$; в) $7xy + 4y^2 = 11$;
б) $36x^2 - y^2 = 27$; г) $x^2 - 7xy + 6y^2 = 18$.

§ 2 РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Прочитайте п. 1 в § 2 учебника.

23

2.1. Между рациональными числами a и b поместите 5 рациональных чисел:
а) $a = 1{,}1$, $b = 1{,}2$; в) $a = 11{,}0001$, $b = 11{,}0002$;
б) $a = \frac{11}{12}$, $b = \frac{10}{11}$; г) $a = \frac{12\,221}{12\,222}$, $b = \frac{122\,221}{122\,222}$.

2.2. Сколько целых чисел заключено между числами:

а) $\frac{1111}{37}$ и $\frac{11\,512}{361}$; б) $\frac{1234}{56}$ и $\frac{78\,910}{789}$?

2.3. Сколько существует обыкновенных правильных несократимых дробей со знаменателем, равным:

а) 17; б) 236?

Выпишите наибольшую из этих дробей в каждом случае.

2.4. Среди правильных дробей вида $\frac{n}{12}$, где n — натуральное число, найдите ближайшую к числу:

а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{4}{7}$; г) $\frac{6}{7}$.

2.5. Среди всех дробей вида $\frac{n}{17}$, где n — натуральное число, найдите ближайшую к числу:

а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{4}{7}$; г) $\frac{6}{7}$.

○**2.6.** Найдите число вида $\frac{m}{n}$ (m, n — натуральные взаимно простые числа) с наименьшим знаменателем, лежащее на числовой прямой между числами:

а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{3}$;

б) $\frac{2}{9}$ и $\frac{2}{7}$; г) $\frac{121}{323}$ и $\frac{101}{232}$.

2.7. Найдите число, равноудалённое от чисел:

а) $\frac{5}{6}$ и $\frac{6}{5}$; б) $\frac{171}{363}$ и $\frac{101}{242}$.

2.8. Известно, что $0 < a < b$. Какое из двух чисел, $\frac{a}{b}$ или $\frac{b}{a}$, лежит ближе к 1?

2.9. Запишите целое число в виде бесконечной десятичной периодической дроби:

а) 1; б) 20; в) –4; г) –111.

2.10. Запишите обыкновенную дробь в виде бесконечной десятичной периодической дроби:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{8}{11}$; г) $\frac{4}{15}$.

○**2.11.** Используя калькулятор, определите десятичный знак с указанным номером после запятой в десятичной записи числа:

а) $\frac{5}{13}$, 301-й знак; в) $\frac{5}{33}$, 2000-й знак;

б) $\frac{3}{26}$, 127-й знак; г) $\frac{5}{14}$, 78-й знак.

Запишите число в виде обыкновенной несократимой дроби:

2.12. а) 0; б) -123; в) 12,0006; г) 0,00123.

○**2.13.** а) 0,(36); б) 12,0(006); в) $-1{,}2(3)$; г) $-0{,}01(234)$.

2.14. Запишите число в виде бесконечной десятичной периодической дроби:

а) 10,1; б) $-1{,}2$; в) 4,023; г) $-0{,}0101$.

Прочитайте п. 2 в § 2 учебника. 26

2.15. Запишите данные десятичные периодические дроби в виде дробей, имеющих одно и то же число цифр в периоде, и определите период каждой из этих дробей в полученной записи:

а) 3,(345) и 59,(34); б) 3,(15) и 59,(23454).

2.16. Запишите данные десятичные чисто периодические дроби в виде смешанных периодических десятичных дробей, определите их периоды. Единственно ли такое представление:

а) 1,(34); б) 30,(115); в) 6,(543); г) 9,(2610)?

○**2.17.** Выполните действия и представьте результат в виде бесконечной периодической десятичной дроби:

а) $\sqrt{0,(4)}$; б) $\sqrt{3,48(4)}$; в) $\sqrt{1,(7)}$; г) $\sqrt{4,3402(7)}$.

○**2.18.** На числовой прямой отмечены точки $A(-5)$ и $B(10)$. С помощью циркуля и линейки отметьте точку:

а) $C(5)$; б) $O(0)$; в) $D(1)$; г) $P(0{,}6)$.

§ 3 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

○**3.1.** Докажите иррациональность числа:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $1 - \sqrt{3}$; г) $\sqrt{3} - \sqrt{15}$.

○**3.2.** Используя результат 3.1, докажите иррациональность числа:

а) $5\sqrt{2}$; б) $-7\sqrt{3}$; в) $5(1 - \sqrt{3})$; г) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}$.

○3.3. а) Пусть $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q > 1$. Докажите, что натуральная степень $\left(\frac{p}{q}\right)^n$, $n \in N$, есть также несократимая дробь.

б) Пусть a^n, $n \in N$, — целое число. Докажите, что a — либо целое, либо иррациональное число.

в) Опираясь на утверждения а) и б), докажите иррациональность числа $\sqrt[3]{21}$.

○3.4. Каким числом, рациональным или иррациональным, является:

а) сумма рационального и иррационального чисел;

б) разность рационального и иррационального чисел;

в) произведение не равного нулю рационального числа и иррационального числа;

г) частное рационального, не равного нулю числа, и иррационального числа?

Какое из данных чисел является иррациональным:

3.5. а) $2,(2345)$; б) $\sqrt{0,(4)}$; в) $\sqrt{1,96}$; г) $\sqrt{19,6}$?

○3.6. а) $1 + \sqrt{12} - 2\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$;

б) $(7 - \sqrt{11}) \cdot (7 + \sqrt{11})$; г) $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$?

○3.7. Приведите пример двух различных иррациональных чисел таких, что:

а) их сумма — рациональное число;

б) их разность — рациональное число;

в) их произведение — рациональное число;

г) их частное — рациональное число.

○3.8. Приведите пример, если это возможно, двух иррациональных различных чисел таких, что *одновременно*:

а) их сумма и разность — рациональные числа;

б) их произведение и частное — рациональные числа.

○3.9. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, у которого один из корней равен:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3} - 5$; в) $\sqrt{5} - 2$; г) $\sqrt{3} - \sqrt{8}$.

○3.10. Докажите, что найдётся пара иррациональных чисел α и β таких, что:

а) $\alpha^2 - \beta$ — натуральное число;

б) $2\alpha^2 + 3\beta$ — целое отрицательное число.

○3.11. Докажите, что существует такое иррациональное число a, что число c является натуральным:

а) $c = a + \frac{1}{a}$; б) $c = a^2 + a$.

○3.12. а) Докажите, что для любого иррационального числа α найдётся такое иррациональное число β, что произведение $\alpha\beta$ — рациональное число.

б) Докажите, что если точка $(x; y)$ лежит на прямой $y = kx + b$, где $k \neq 0$, b — рациональные числа, то числа x и y или оба рациональные, или оба иррациональные.

○3.13. Найдите хотя бы одно рациональное число, расположенное на отрезке:

а) $\left[\sqrt{2}; \sqrt{3}\right]$; в) $\left[\sqrt{5} - 2; 2{,}236\right]$;

б) $\left[\sqrt{3} - \sqrt{2}; \sqrt{3} + \sqrt{2}\right]$; г) $\left[\sqrt{3} + \sqrt{5}; 3{,}(9)\right]$.

○3.14. Найдите хотя бы одно иррациональное число, расположенное на отрезке:

а) $[0; 1]$; в) $[1{,}2; 1{,}6]$;

б) $[1{,}2; 1{,}22]$; г) $[1{,}2; 1{,}201]$.

○3.15. Найдите хотя бы одно рациональное число, расположенное на полуинтервале:

а) $\left(1{,}5; \sqrt{3}\right]$; б) $\left[\sqrt{3} - \sqrt{2}; 0{,}5\right)$.

○3.16. Найдите хотя бы одно иррациональное число, расположенное на полуинтервале:

а) $\left[0; \sqrt{2}\right)$; б) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}; 0{,}5\right]$.

○3.17. Найдите хотя бы одну точку $(x; y)$, имеющую рациональные координаты, лежащую на прямой:

а) $y = x\left(\sqrt{2} + 1\right) - 2$; б) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{2}} - 2$.

○3.18. Найдите хотя бы одну точку $(x; y)$, имеющую иррациональные координаты, лежащую на прямой:

а) $y = 5x - 2$; б) $y = \frac{x}{7} + 2$.

○3.19. Могут ли длины сторон треугольника выражаться числами:

а) $\sqrt{3}, \sqrt{2}, 1$; б) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, 4$?

●**3.20.** Отметьте на числовой прямой точки $A(1)$ и $B(4)$. С помощью циркуля и линейки постройте точку:

а) $C(\sqrt{7})$; б) $D(1-\sqrt{7})$; в) $E\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$; г) $G(2-\sqrt{5})$.

§ 4 МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

32 **Прочитайте пп. 1—2 в § 4 учебника.**

4.1. На числовой прямой отмечены точки $A(-2)$ и $B(17)$. Найдите координаты:

а) середины отрезка AB;
б) точки M, если B — середина отрезка AM;
в) точки M, делящей отрезок AB в отношении $AM : MB = 2 : 3$;
г) точки C числовой прямой — такой, что $AC = 3CB$.

4.2. Решите уравнение, определите наибольший и наименьший его корень и расстояние между ними:

а) $(x-1)^2(31x-37)(41x-49)=0$;
б) $(x-1)^2(31x-37)(41x-49)=(31x-37)(41x-49)$.

4.3. Укажите два рациональных и два иррациональных числа, принадлежащих данному промежутку:

а) $\left(0{,}2; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; в) $(0{,}21; 51)$;
б) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; г) $(0{,}21; 0{,}22)$.

○**4.4.** Существует ли геометрическая прогрессия, все члены которой различны и расположены на отрезке:

а) $[1; 2]$; б) $[1; 1{,}2]$?

Если существует, то приведите соответствующий пример, если не существует, то докажите это.

4.5. Используя калькулятор, расположите в порядке возрастания числа:

π, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, $3{,}14$, $3{,}1415$, $\sqrt[3]{31}$ и $\sqrt{9{,}91}$.

4.6. Выпишите 5 различных чисел, расположенных между числами:

а) 0,123 и 0,456; в) 3,1415 и 3,1416;
б) −0,123 и −0,122; г) −4,567 и −4,566.

4.7. Выпишите 5 различных чисел, расположенных между числами:

а) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$;

б) $-\frac{11}{14}$ и $-\frac{10}{13}$;

в) $\frac{11}{45}$ и $\frac{6}{23}$;

г) $-\frac{15}{7}$ и $-\frac{17}{9}$.

4.8. Сравните числа a и b:

а) $a = \frac{12}{47}$, $b = \frac{51}{200}$;

б) $a = -\frac{31}{14}$, $b = -2{,}21$;

в) $a = \frac{17}{19}$, $b = \frac{37}{39}$;

г) $a = -\frac{431}{114}$, $b = -3{,}79$.

Разберите решение примера 6 в § 4 учебника. 38

○**4.9.** Сравните числа a и b:

а) $a = 1 + \sqrt{5}$, $b = \sqrt{11}$;

б) $a = \sqrt{7} - \sqrt{19}$, $b = \sqrt{5} - \sqrt{21}$;

в) $a = \sqrt{29}$, $b = 1 + \sqrt{19}$;

г) $a = \sqrt{17} - \sqrt{59}$, $b = \sqrt{15} - \sqrt{61}$.

Разберите решение примеров 3—5 в § 4 учебника. 36

○**4.10.** Докажите неравенство $\frac{a}{b} \leqslant \frac{a+n}{b+n}$, если $0 < a < b$, $n \geqslant 0$.

○**4.11.** На числовой прямой отмечены точки 0 и 1. При помощи циркуля и линейки постройте точки:

а) 1,4; б) $\sqrt{2}$; в) $-\sqrt{10}$; г) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

○**4.12.** а) На числовой прямой отмечены точки –3 и 1. При помощи циркуля и линейки постройте точки 0 и 5.

б) На числовой прямой отмечены точки $-\sqrt{2}$ и 3. При помощи циркуля и линейки постройте точку 0.

Разберите решение примера 7 в § 4 учебника. 39

○**4.13.** а) Докажите, что в интервале (8; 9) нет ни наименьшего, ни наибольшего числа;

б) докажите, что среди чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 < 5$, нет ни наименьшего, ни наибольшего числа.

○**4.14.** Число m называют *точной верхней границей* числового множества X, если для любого числа $x \in X$ справедливо неравенство $x \leqslant m$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ (ε — буква греческого алфавита *эпсилон*) существует такое число $x_\varepsilon \in X$, что $x_\varepsilon > m - \varepsilon$. Найдите точную верхнюю границу множества X, если:

а) $X = [0; 1]$; в) $X = \left\{x \mid x = \dfrac{1}{n},\ n \in N\right\}$;

б) $X = [0; 1)$; г) $X = \left\{x \mid x = \dfrac{1 + 5n}{n},\ n \in N\right\}$.

○**4.15.** Число m называют *точной нижней границей* числового множества X, если для любого числа $x \in X$ справедливо неравенство $x \geqslant m$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $x_\varepsilon \in X$, что $x_\varepsilon < m + \varepsilon$. Найдите точную нижнюю границу множества X, если:

а) $X = [0; 1]$; в) $X = \left\{x \mid x = \dfrac{1}{n},\ n \in N\right\}$;

б) $X = [0; 1)$; г) $X = \left\{x \mid x = \dfrac{1 + 5n}{n},\ n \in N\right\}$.

○**4.16.** а) Найдите все такие значения параметра b, при которых в промежутке $(-5; b]$ содержится ровно 8 целых чисел.

б) Найдите все такие значения параметра b, при которых в промежутке $(-5; b)$ содержится ровно 8 целых чисел.

в) Найдите все такие значения параметра b, при которых в промежутке $[b; 8]$ находится ровно 8 целых чисел.

г) Найдите все такие значения параметра b, при которых в промежутке $(b; b + 4]$ находится ровно 5 целых чисел.

○**4.17.** а) Найдите отрезок наименьшей длины, содержащий 33 целых числа, большее из которых есть 12.

б) Найдите промежуток наибольшей длины, содержащий не более четырёх целых чисел, меньшее из которых есть 18.

○**4.18.** На числовой прямой отмечены точки $A(2a - 6a^2)$ и $B(2a - 3)$. При каких значениях a точка C лежит между A и B, если:
а) $C(2)$; б) $C(-1)$?

○**4.19.** На числовой прямой отмечены точки $A(12a + 6a^2)$ и $B(-2a + 3)$. При каких значениях a точка C лежит между A и B, если:

а) $C(-2)$; б) $C(a)$?

4.20. Расположите на числовой прямой числа a, b, 0, если:

а) $\begin{cases} ab < 0, \\ a + b < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} ab < 0, \\ a + b > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} ab > 0, \\ a + b > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} ab > 0, \\ a + b < 0. \end{cases}$

4.21. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество всех точек x числовой прямой, удовлетворяющих неравенству $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, называют *$\varepsilon$-окрестностью* точки a, при этом точки $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$ называют *граничными точками* ε-окрестности точки a. При каких $\varepsilon > 0$ точка 12,35 лежит в ε-окрестности точки:

а) 12,5; б) 12,2?

4.22. Точки x и y являются граничными точками некоторой ε-окрестности. Найдите ε, если:

а) $x = 12{,}5$, $y = 12{,}7$; в) $x = -2{,}9$, $y = 3{,}3$;

б) $x = 32{,}31$, $y = 31{,}32$; г) $x = -31$, $y = -29{,}8$.

4.23. Известно, что $2{,}1 < a < 2{,}2$, $0 < b < 0{,}1$. Определите, в каких границах лежит число c:

а) $c = a + b$; в) $c = ab$;

б) $c = 3a - 5b$; г) $c = \dfrac{a}{b}$.

§ 5 МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

5.1. Найдите модуль числа:

а) $\left|1 - \sqrt{2}\right|$; в) $\left|2{,}2 - \sqrt{5}\right|$;

б) $\left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right|$; г) $\left|\sqrt{6} - 2{,}5\right|$.

5.2. Используя определение модуля, запишите выражение без знака модуля:

а) $|x - 5|$; в) $|x - 5| - |4x - 5|$;

б) $|x - 5| + |x + 8|$; г) $|x - 5| \cdot (x + 3)$.

○**5.3.** При каких значениях x верно равенство:

а) $|x| = x$; в) $|x| = -x$;

б) $|x - 7| = x - 7$; г) $|x^2 - 7x + 12| = 7x - x^2 - 12$?

5.4. Найдите расстояние между точками A и B числовой прямой:

а) $A(7)$ и $B(12)$; в) $A(-7)$ и $B(12)$;

б) $A(-17)$ и $B(-62)$; г) $O(0)$ и $B(-12)$.

На числовой прямой отметьте все такие точки x, которые удовлетворяют заданному соотношению:

5.5. а) $|x| = -x$; в) $|x| = x$;
б) $|x + 2| = x + 2$; г) $|x - 2| = 2 - x$.

5.6. а) $|x| \leqslant x$; в) $|x + 2| \leqslant x + 2$;
б) $|x| \leqslant -x$; г) $|x - 2| \leqslant 2 - x$.

5.7. а) $|x| \geqslant x$; в) $|x + 2| \geqslant x + 2$;
б) $|x| \geqslant -x$; г) $|x - 2| \geqslant 2 - x$.

5.8. Докажите свойства модуля действительного числа:
а) $|a| \geqslant a$; в) $|a| > a \Leftrightarrow a < 0$;
б) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$; г) $|a| + |b| + |c| = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$.

Упростите выражение:

5.9. а) $|a - b| - |b - a|$; б) $|a - c| - |a + c| - |c - a| + |-c - a|$.

○**5.10.** а) $\sqrt{\pi^2 - 8\pi + 16}$;

б) $\sqrt{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(3 - \sqrt{5}\right)^2}$;

в) $\sqrt{4\pi^2 - 28\pi + 49}$;

г) $\sqrt{\left(2{,}7 - \sqrt{7}\right)^2} - \sqrt{\left(2{,}6 - \sqrt{7}\right)^2}$.

○**5.11.** а) $\left|\sqrt{51} - 7\right| + \left|\sqrt{51} - 5\sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{75} - 11\right|$;

б) $\left|1 - \sqrt{2}\right| + \left|\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right| + \left|2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\right| + \ldots +$
$+ \left|5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\right| + \left|6\sqrt{2} - 9\right|$;

в) $\left|1 - \sqrt{37}\right| + \left|2 - \sqrt{37}\right| + \left|3 - \sqrt{37}\right| + \ldots +$
$+ \left|6 - \sqrt{37}\right| + 6 \cdot \left|7 - \sqrt{37}\right|$;

г) $\left|1 - \sqrt{137}\right| + \left|2 - \sqrt{137}\right| + \left|3 - \sqrt{137}\right| + \ldots +$
$+ \left|11 - \sqrt{137}\right| + 11 \cdot \left|\sqrt{137} - 12\right|$.

○**5.12.** а) Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Докажите, что
$$\left|a_1 - a_2\right| + \left|a_2 - a_3\right| + \ldots + \left|a_{n-1} - a_n\right| = \left|a_1 - a_n\right|.$$

б) Пусть $n < \sqrt{a} < n + 1$. Докажите, что
$$\left|1 - \sqrt{a}\right| + \left|2 - \sqrt{a}\right| + \ldots + \left|n - \sqrt{a}\right| + n \cdot \left|\sqrt{a} - n - 1\right| = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Решите уравнение:

○**5.13.** а) $|x + 4| = 5$; в) $|x - 4| = 15$;
б) $|x - 4| = |10 - x|$; г) $|x - 4| = |5x|$.

○**5.14.** а) $|x + 4| = -5$; в) $|x - 4| = \sqrt{20} - 2\sqrt{5}$;
б) $|x - 4| = 15 - \sqrt{227}$; г) $|x + 4| = 3\sqrt{12} - 6\sqrt{3}$.

○**5.15.** а) $|x + 4| = 2x$; в) $|x^2 - 4x| = 3x$;
б) $|x - 14| = 8 + 2x$; г) $|x^2 + 7x| = 4x + 10$.

Решите неравенство:

●**5.16.** а) $|x + 4| < 2x$; в) $|x - 14| \leqslant 8 + 2x$;
б) $|x^2 - 4x| < 3x$; г) $|x^2 + 7x| \leqslant 4x + 10$.

●**5.17.** а) $|x + 5| > 5x - 7$; в) $|7x + 4| \geqslant 6 + 5x$;
б) $|x^2 + x - 5| > 3x$; г) $|-x^2 - x| \geqslant 4x - 2$.

○**5.18.** а) Какие значения может принимать $|x - 7|$, если $|x - 4| = 6$;
б) какие значения может принимать $|x + 5|$, если $|x - 2| = 16$?

●**5.19.** а) Найдите все значения a, при которых $|x - 2| = a$, если $|x - a| = 1$;
б) найдите все значения a, при которых $|x - 2a + a^2| = a$, если $|x - a| = 2 - a$.

●**5.20.** а) Какие значения может принимать $|x - y|$, если $|x - a| = 7$, $|y - a| = 16$;
б) какие значения может принимать $|a - b|$, если $|x - a| = 3$, $|x - b| = 5$?

§ 6 МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Прочитайте п. 1 в § 6 учебника. 48

○**6.1.** Методом математической индукции докажите:
а) формулу общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$;
б) формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{(2a_1 + d(n - 1))n}{2}$;
в) формулу общего члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$;
г) формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ при $q \neq 1$.

Вычислите сумму:

6.2. а) $7 + 8 + 9 + \ldots + (n + 6)$;

б) $2 + 11 + 20 + \ldots + (9n - 7)$;

в) $1{,}35 + 1{,}4 + 1{,}45 + \ldots + (0{,}05n + 1{,}3)$;

г) $0{,}(3) + 0{,}(5) + 0{,}(7) + \ldots + (0{,}(2)n + 0{,}(1))$.

6.3. а) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + n(-1)^{n+1}$;

б) $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \ldots + (-1)^n n^2$;

в) $0 + 3 + 2 + 5 + 4 + 7 + 6 + \ldots + (n + (-1)^n)$;

г) $2 - 6 + 12 - 20 + \ldots + (-1)^{n+1}(n^2 + n)$.

Докажите, что при любом натуральном значении n выполняется равенство:

6.4. а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$;

в) $5 + 6 + 7 + \ldots + (n + 4) = \dfrac{n(n+9)}{2}$;

г) $1{,}6 + 3{,}1 + 4{,}6 + \ldots + (1{,}5n + 0{,}1) = \dfrac{n(3n + 3{,}4)}{4}$.

6.5. а) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

б) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} = 1{,}5 - \dfrac{1{,}5}{3^n}$;

в) $3 - 9 + 27 - 81 + \ldots + (-3)^n = \dfrac{3}{4}(1 - (-3)^n)$;

г) $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots + \underbrace{0{,}000\ldots01}_{n - 1 \text{ нуль после запятой}} =$

$= 1{,}(1) \cdot (1 - \underbrace{0{,}000\ldots01}_{n \text{ нулей после запятой}})$.

51 **Разберите решение примеров 1—3 в § 6 учебника.**

6.6. Докажите равенство (при каждом натуральном n):

а) $1^2 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3n - 2)^2 = \dfrac{n(6n^2 - 3n - 1)}{2}$;

б) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(4n^2 - 1)}{3}$;

в) $3^2 + 7^2 + 10^2 + \ldots + (4n - 1)^2 = \dfrac{n(16n^2 + 12n - 1)}{3}$.

г) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

Докажите, что при любом натуральном значении n выполняется равенство:

○**6.7.** а) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$;

в) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \ldots + (2n - 1)(2n + 1) = \dfrac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$;

г) $2 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 8 \cdot 11 + \ldots + (3n - 1)(3n + 2) = n(3n^2 + 6n + 1)$.

○**6.8.** а) $4 \cdot 2 + 7 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^5 + \ldots + (3n + 1)2^{2n-1} = n \cdot 2^{2n+1}$;

б) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \ldots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n + 2}{2^n}$;

в) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + (n - 1)n^2 = \dfrac{n(n^2 - 1)(3n + 2)}{12}$;

г) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \ldots + \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{3}{4}\left(1 - \dfrac{2n + 3}{3^{n+1}}\right)$.

○**6.9.** а) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n - 1)(2n + 1)} = \dfrac{n(n + 1)}{2(2n + 1)}$;

б) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n + 1)(n + 2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n + 1)(n + 2)}\right)$;

в) $\dfrac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} + \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{n \cdot (n + 3)}{(n + 1)(n + 2)} = \dfrac{n(n + 1)}{n + 2}$;

г) $\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dfrac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dfrac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots + \dfrac{n}{(2n - 1)(2n + 1)(2n + 3)} =$

$= \dfrac{n(n + 1)}{2(2n + 1)(2n + 3)}$.

●**6.10.** Докажите, что для любого $n \in N$ выполняется равенство:

а) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$;

б) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots + \dfrac{n}{(n + 1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n + 1)!}$.

6.11. Докажите, что

$$\frac{1}{a\cdot(a+d)}+\frac{1}{(a+d)\cdot(a+2d)}+\frac{1}{(a+2d)\cdot(a+3d)}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(a+d(n-1))(a+dn)}=\frac{n}{a(a+dn)},$$

где $a \neq 0$, $d \neq 0$, $n \in N$:

а) методом математической индукции;

б) без использования метода математической индукции.

6.12. Используя тождество из 6.11, вычислите сумму:

а) $\frac{1}{4\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 19}+\ldots+\frac{1}{144\cdot 149}$;

б) $\frac{1}{1{,}5\cdot 2{,}5}+\frac{1}{2{,}5\cdot 3{,}5}+\frac{1}{3{,}5\cdot 4{,}5}+\ldots+\frac{1}{73{,}5\cdot 74{,}5}$.

6.13. Используя тождество из 6.11, докажите неравенство:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}<1$;

б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99}<0{,}99$;

в) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}<0{,}5$;

г) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{997\cdot 999}<0{,}4996$.

6.14. Рассмотрите три утверждения, начните их доказывать в указанном порядке методом математической индукции и определите, какое из них является верным для любого натурального значения n, а какие — нет:

а) $2+7+14+\ldots+(n^2+2n-1)=\frac{n(2n^2+9n+2)}{6}$,

$2+7+14+\ldots+(n^2+2n-1)=\frac{n(2n^2+7n+3)}{6}$,

$2+7+14+\ldots+(n^2+2n-1)=\frac{n(2n^2+9n+1)}{6}$;

б) $1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2^{1-n}+2n$,

$1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=3^{1-n}+3(n-1)$,

$1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2^{1-n}+2(n-1)$.

Разберите решение примеров 4—5 в § 6 учебника.

54

6.15. Докажите неравенство:

а) $5^n > 3n - 1$, где $n \in N$;

б) $3^n > 2n^2 + 3n$, где $n \in N$, $n \geqslant 4$;

в) $2^n > 5n + 1$, где $n \in N$, $n \geqslant 5$;

г) $5^n > 3n^2 + 10n$, где $n \in N$, $n \geqslant 3$.

Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство:

6.16. а) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{(n+1)^2} < 1$;

б) $\frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{13^2} + ... + \frac{1}{(4n+1)^2} < \frac{1}{4}$.

6.17. а) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} - 1$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 1$.

Разберите решение примера 6 в § 6 учебника.

55

Докажите, что для любого натурального значения n справедливо утверждение:

6.18. а) $(n^3 + 35n) \vdots 6$;
б) $(n^3 + 3n^2 + 8n) \vdots 3$;
в) $(n^5 - n) \vdots 30$;
г) $(2n^3 + 3n^2 + 7n) \vdots 6$.

6.19. а) $(7^n - 1) \vdots 6$;
б) $(2^{2n+1} + 1) \vdots 3$;
в) $(17^n - 1) \vdots 16$;
г) $(13^{2n+1} + 1) \vdots 14$.

6.20. а) $(11^{6n+3} + 1) \vdots 148$;
б) $(7^{2n} - 4^{2n}) \vdots 33$;
в) $(13^{4n+2} + 1) \vdots 85$;
г) $(5^{n+3} + 11^{3n+1}) \vdots 17$.

6.21. а) $(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n) \vdots 11$;
б) $(5^{2n+1} + 3^{n+2}2^{n-1}) \vdots 19$;
в) $(5^{2+n} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}) \vdots 59$;
г) $(5^{n+3}2^n - 125) \vdots 45$.

6.22. а) $(6^n + 20n + 24) \vdots 25$;
б) $(7^n + 12n + 17) \vdots 18$.

6.23. Выведите формулу n-го члена последовательности (a_n), заданной рекуррентным соотношением:

а) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n$; докажите, что $a_n = \frac{(n-1)n}{2}$;

б) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n^2$; докажите, что $a_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$;

в) $a_1 = -13$, $a_{n+1} = a_n + 3n$; докажите, что $a_n = \frac{(3n - 29)n}{2}$;

г) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n^3$; докажите, что $a_n = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$.

○**6.24.** а) Докажите, что количество разных наборов по два предмета, которые можно сделать из n различных предметов ($n \geqslant 2$), равно $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

б) Докажите, что количество разных наборов по три предмета, которые можно сделать из n различных предметов ($n \geqslant 3$), равно $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$.

○**6.25.** а) Докажите, что количество разных непустых наборов, которые можно сделать из n различных предметов, равно $2^n - 1$.

б) Докажите, что n различных предметов можно расставить в ряд $n!$ способами.

●**6.26.** Докажите, что любое натуральное число $h > 4$ можно представить в виде $h = 3m + 5n$, где m и n — целые числа.

○**6.27.** Докажите методом математической индукции, что у выпуклого n-угольника ($n \geqslant 3$):

а) сумма внутренних углов равна $180°(n - 2)$;

б) число диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

ГЛАВА 2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

§ 7 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ И СПОСОБЫ ЕЁ ЗАДАНИЯ

7.1. На рисунке 1 изображён шестиугольник $ABCDEF$, составленный из двух прямоугольников, причём $AB = 10$, $BC = CD = 3$, $DE = 2$.

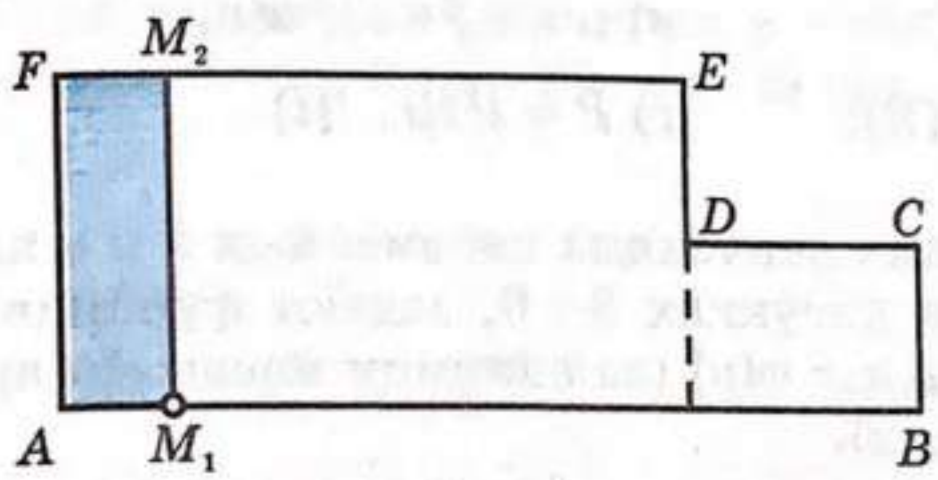


Рис. 1

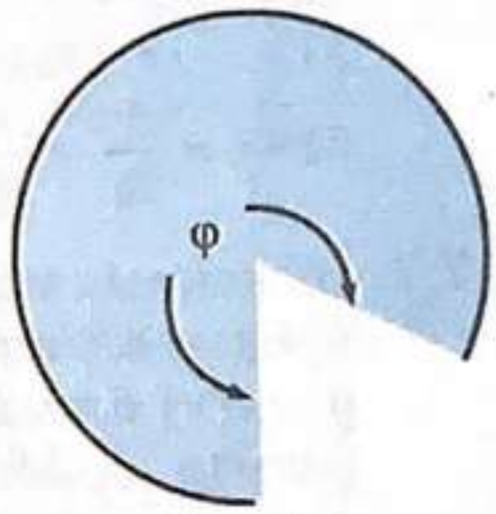


Рис. 2

Найдите:

а) периметр шестиугольника $ABCDEF$;

б) площадь шестиугольника $ABCDEF$;

в) площадь прямоугольника AM_1M_2F, если $AM_1 = x$, $0 \leqslant x \leqslant 7$;

г) площадь шестиугольника M_1BCDEM_2, если $M_1M_2 \| AF$ и $AM_1 = x$, $7 \leqslant x \leqslant 10$.

7.2. Используя условие задания 7.1, выразите площадь $S(x)$ части многоугольника $ABCDEF$, расположенной справа от прямой M_1M_2, как функцию от длины отрезка $AM_1 = x$.

7.3. Выполните рисунок 1 в тетради и совместите ось Ox с прямой AB, а ось Oy — с прямой AF. Определите координаты точек A, M_1, B, C, D, E, M_2, F в полученной прямоугольной системе координат. Задайте функцию, графиком которой является:

а) прямая DC;

б) прямая FE;

в) отрезок DC;

г) отрезок FE.

7.4. На рисунке 2 изображён сектор круга, радиус которого равен 1, а центральный угол равен φ, причём $\varphi \in (0; 2\pi)$.

а) Выразите площадь S этого сектора как функцию угла φ. Постройте график функции $S = S(\varphi)$.

б) Вычислите значение функции $S = S(\varphi)$ при $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

в) Найдите $S(2) - S(1)$.

г) Найдите $S(\varphi + \delta) - S(\varphi)$.

7.5. Площадь треугольника со стороной a и высотой h, опущенной на эту сторону, равна 20. Выразите длину стороны a как функцию длины высоты h и найдите область определения и множество значений этой функции.

7.6. Перед вами известные физические формулы, связывающие несколько переменных величин. Выразите указанную величину как функцию от величины, записанной в скобках:

а) $s = vt$, $t(s)$;

б) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $R_1(R)$;

в) $v = v_0 + at$, $a(v)$;

г) $P = I^2Rt$, $I(t)$.

7.7. Выясните, при каких значениях переменных x и y линии, представленные на рисунках 3—6, задают функции вида $y = f(x)$ или/и вида $x = \varphi(y)$ (за единицу масштаба принят размер одной клетки).

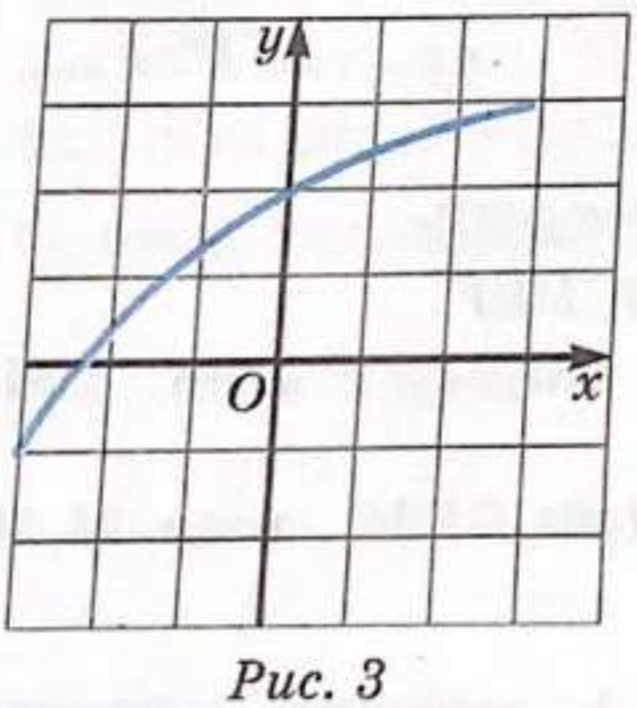


Рис. 3

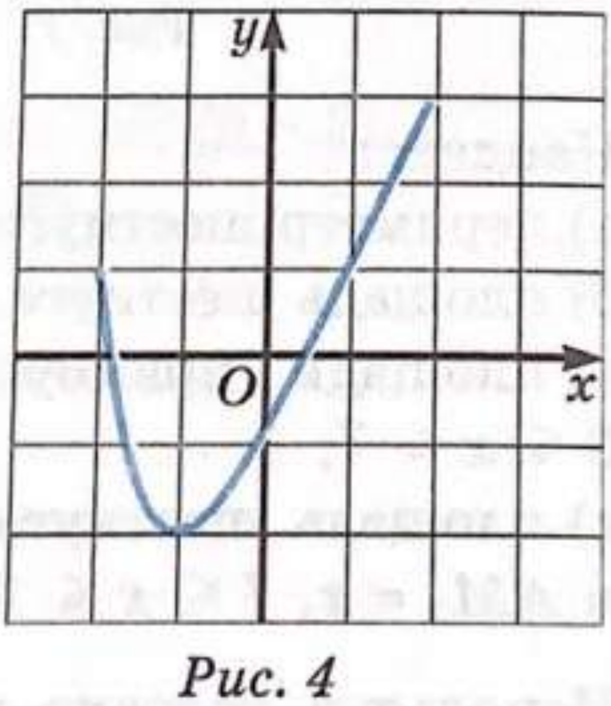


Рис. 4

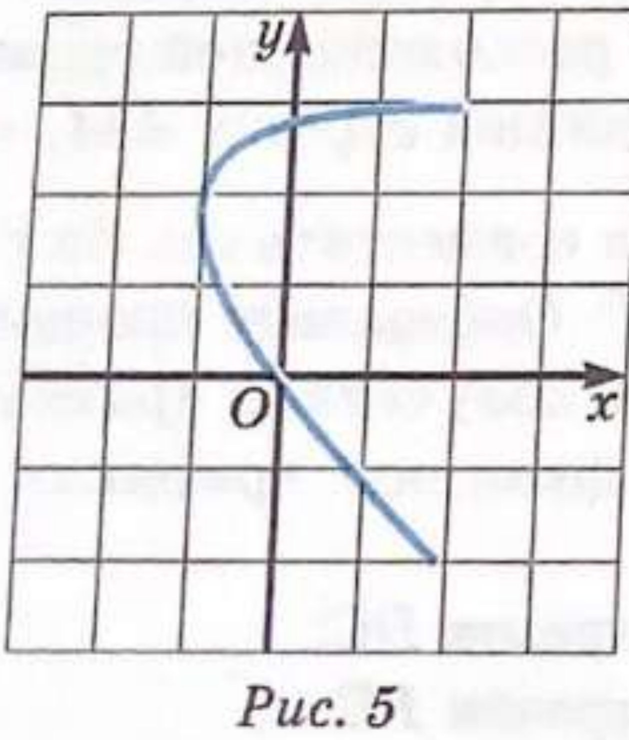


Рис. 5

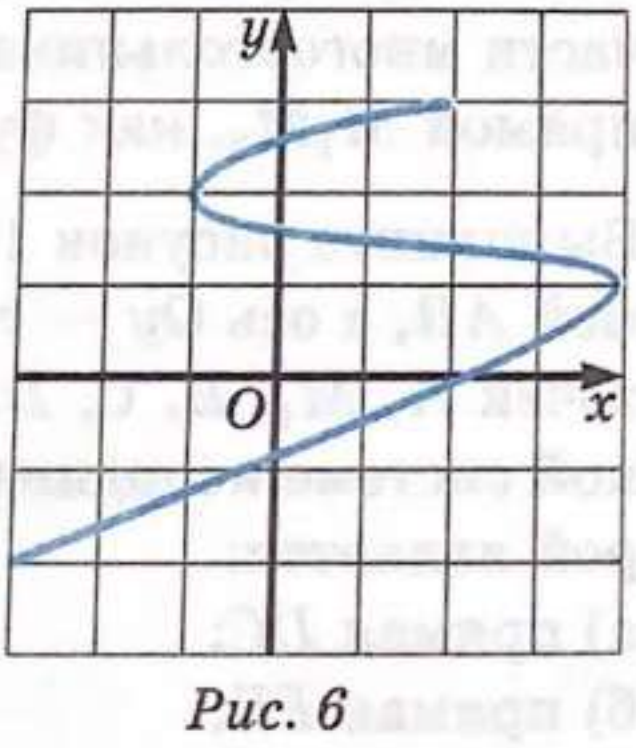


Рис. 6

7.8. Из прямоугольного листа жести размером 30×50 см по углам вырезали квадраты со стороной x см и из полученной заготовки в форме креста согнули коробку прямоугольной формы высотой, равной x см (рис. 7). Выразите объём полученной коробки как функцию от x.

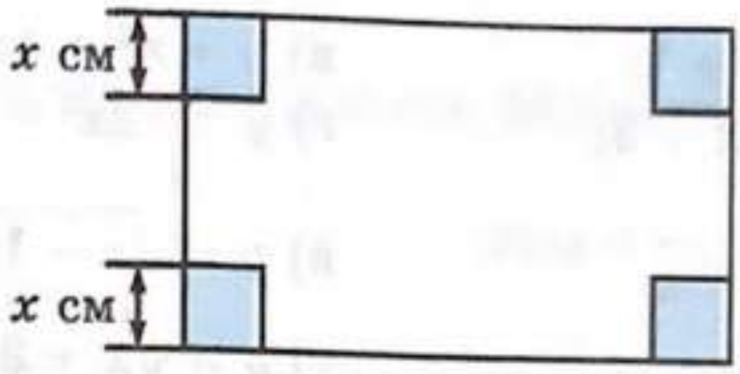


Рис. 7

○7.9. На рисунке представлен график функции, определённой на отрезке $[a; b]$; $S(x)$ — площадь «подграфика» на отрезке $[a; x]$, $a \leqslant x \leqslant b$. Выразите величину $S(x)$ через x и постройте график функции $y = S(x)$. По этому графику найдите область значений функции $y = S(x)$:

а) рис. 8 ($a = 0$, $b = 2$); б) рис. 9 ($a = -4$, $b = 8$).

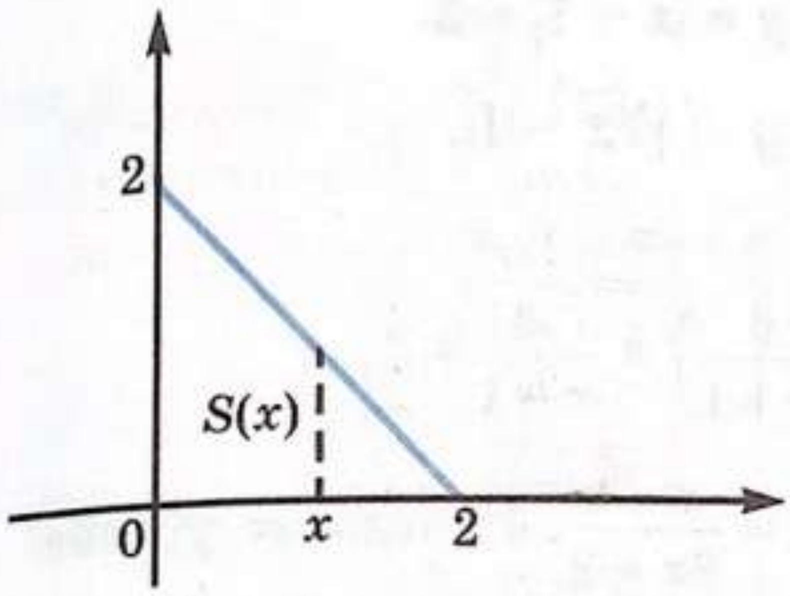


Рис. 8

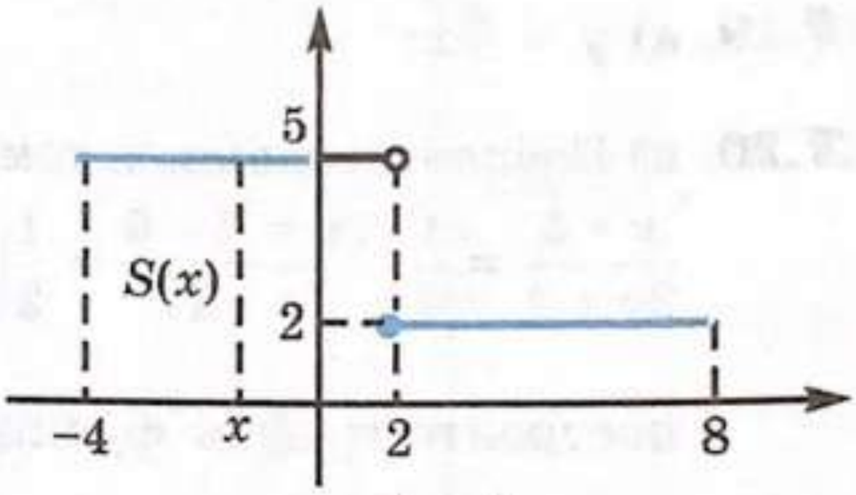


Рис. 9

Решите данное уравнение относительно y и относительно x. Исходя из полученных решений и допустимых значений переменных, выясните, можно ли говорить, что данное уравнение задаёт функцию вида $y = f(x)$ или/и вида $x = \varphi(y)$:

7.10. а) $2x + 3y = 24$; в) $7x - 5y = 35$;

б) $\dfrac{x - y}{x + 2y} = 2$; г) $\dfrac{2x + y}{x - 4y} = -2$.

●7.11. а) $2x - 3y^2 = -12$; б) $\dfrac{x}{x-3} \cdot \dfrac{x+1}{x+4} = \dfrac{y}{y-3} \cdot \dfrac{y+1}{y+4}$.

Постройте график функции:

7.12. а) $y = 2x - 3$; в) $y = 0{,}5x + 1$;

б) $y = 6 - 3x$; г) $y = -2 - \dfrac{1}{3}x$.

7.13. а) $y = 2x^2$; б) $y = -\frac{3}{x}$; в) $y = -0{,}5x^2$; г) $y = \frac{2}{x}$.

7.14. а) $y = x^2 - 4$; б) $y = (x - 1)^2$; в) $y = 2x^2 + 1$; г) $y = -(x + 2)^2$.

7.15. а) $y = x^2 - 6x + 8$; б) $y = -x^2 + 2x + 3$; в) $y = x^2 + 4x + 7$; г) $y = -2x^2 - 6x + 1$.

7.16. а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x} + 2$; в) $y = \sqrt{x - 1}$; г) $y = \sqrt{x + 2} - 4$.

○**7.17.** а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = \frac{2}{x - 1}$; в) $y = \frac{2}{x} + 3$; г) $y = \frac{2}{x - 1} + 3$.

○**7.18.** а) $y = |x|$; б) $y = |x + 2|$; в) $y = |x| - 3$; г) $y = |x - 1| + 2$.

○**7.19.** а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = \left|\sqrt[3]{x} - 1\right|$.

○**7.20.** а) Воспользовавшись тем, что

$$\frac{x - 5}{2x + 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x + 1) - 6}{x + 1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{6}{x + 1}\right) = \frac{-3}{x + 1} + \frac{1}{2},$$

постройте график функции $y = \frac{x - 5}{2x + 2}$. Напишите уравнения асимптот полученной гиперболы.

б) Функцию $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, где $c \neq 0$, $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$, называют *дробно-линейной функцией*. Докажите, что графиком дробно-линейной функции является гипербола с асимптотами $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$.

59 **Прочитайте пп. 1—2 в § 7 учебника.**

○**7.21.** Постройте график функции и найдите область её значений:

а) $y = 2x^2 - 1$, $x \in [-2; 1]$;

б) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$, $x \in [0; +\infty)$;

в) $y = \sqrt{x + 3} - 1$, $x \in (-2; 1]$;

г) $y = 2x^2 + 2x - 1$, $x \in [-1; 2]$.

○**7.22.** Постройте график функции $y = f(x)$ и найдите область её определения и область её значений:

а) $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2, & 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2, & -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

Найдите область определения функции:

7.23. а) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; в) $y = \dfrac{x - 2}{x^2 - x - 12}$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; г) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 + x + 12}$.

○**7.24.** а) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x - 1}}$; в) $y = \sqrt{\dfrac{-4x}{-10 - x}}$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{x - 12}{x^2 - 16x + 48}}$; г) $y = \sqrt{\dfrac{x + 11}{x^2 + 14x + 33}}$.

○**7.25.** а) $y = \dfrac{\sqrt{x - 12}}{x^2 - 1}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{x + 12}}{x^2 - 1}$;

б) $y = \dfrac{1 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x + 9}}$; г) $y = \dfrac{x - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x + 3}}$.

○**7.26.** а) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 1, \\ x^3, & x \leqslant 1; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x < 1, \\ x^3, & x \geqslant 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \dfrac{6x}{x + 7}, & x \geqslant -1, \\ \dfrac{18}{2 - x}, & x < -1; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} \dfrac{6x}{x + 7}, & x < -1, \\ \dfrac{18}{2 - x}, & x \geqslant -1. \end{cases}$

7.27. Пусть $f(x) = -3x + 2$. Найдите:

а) $f(-x)$; б) $f(x + 5)$; в) $f(f(1))$; г) $f(f(x))$.

7.28. Пусть $f(x) = x^2$. Найдите:

а) $f(2x)$; б) $f(x - 5)$; в) $f(f(3))$; г) $f(f(x))$.

○**7.29.** Пусть $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 2}$. Найдите:

а) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; б) $f(2x - 1)$; в) $f(f(5))$; г) $f(f(x))$.

○**7.30.** а) Пусть $f(x) = x^2 + 2$. Докажите, что $f(x) = f(-x)$.

б) Пусть $f(x) = -x^3 + 2x$. Докажите, что $f(x) = -f(-x)$.

в) Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Докажите, что $(f(x))^{-1} = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

г) Пусть $f(x) = x^2 + 2$. Докажите, что $f(|x|) = f(x)$ и $|f(x)| = f(x)$.

●**7.31.** Найдите область определения функции, учитывая все возможные значения параметра a:

а) $y = \frac{\sqrt{x - a}}{x^2 - 1}$;

б) $y = \sqrt{1 - a \cdot |x|}$;

в) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{x - a}$;

г) $y = \frac{a \cdot x^3 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x - a}}$.

○**7.32.** Пусть $f(x) = 2 - \sqrt{1 - x}$; $g(x) = \frac{1 + 2x}{3 + x}$. Найдите область определения функции:

а) $y = f(x) + g(x)$;

б) $y = f(x) - g(x)$;

в) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$;

г) $y = \frac{g(x)}{f(x)}$.

○**7.33.** Пусть $f(x) = x^2 - 3x - 4$; $g(x) = 5x - x^2$. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$;

б) $y = \sqrt{f(x) \cdot g(x)}$;

в) $y = \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$;

г) $y = \sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}$.

○**7.34.** Пусть $D(f) = [-4; 1]$ — область определения функции $y = f(x)$. Найдите область определения функции:

а) $y = 15x - f(x)$;

б) $y = \frac{7 + 4f(x)}{2 - x}$;

в) $y = \frac{7 + 4f(x)}{4 + x}$;

г) $y = \frac{x - 3f(x)}{4 - x^2}$.

○**7.35.** Пусть $D(f) = [-5; 10]$. Найдите область определения функции:

а) $y = f(-x)$;

б) $y = |f(-x)|$;

в) $y = f(|-x|)$;

г) $y = f(-|x|)$.

○**7.36.** Пусть $D(f) = [-2; 9]$. Найдите область определения функции:

а) $y = 4f(x - 1)$;

б) $y = -4f(x + 11)$;

в) $y = 4 \cdot f(x) - 1$;

г) $y = -4 \cdot f(x) + 11$.

○**7.37.** а) При каких значениях параметра a функция $y = 3 - \sqrt{x - a}$ определена во всех точках отрезка $[-11; 7]$?

б) При каких значениях параметра a функция $y = 3 - \sqrt{x - 3}$ определена во всех точках отрезка $[a - 1; a + 1]$?

●**7.38.** Найдите все значения параметра a, при которых областью определения функции $y = \sqrt{x - 3} + \sqrt{ax + 4}$ будет:

а) луч;

б) отрезок;

в) единственное число (единственная точка);

г) пустое множество.

○**7.39.** а) Докажите, что если число b принадлежит области определения функции $y = \sqrt{x^4 - 7x + 3} - \sqrt{x^4 + 7x + 3}$, то и число $(-b)$ принадлежит этой области.

б) Докажите, что если число b не принадлежит области определения функции $y = \sqrt{x^5 - x + 3} + 3\sqrt{-x^5 + x + 3}$, то и число $(-b)$ не принадлежит этой области.

●**7.40.** Найдите все такие числа b, принадлежащие области определения $D(f)$ функции $y = \dfrac{1 - \sqrt{2x^2 - 7x - 22}}{x + 30}$, для которых:

а) число $b + 1$ не принадлежит $D(f)$;

б) число $b - 1$ не принадлежит $D(f)$;

в) оба числа $b + 1$ и $b - 1$ принадлежат $D(f)$;

г) отрезок $[b + 1; b + 2]$ принадлежит $D(f)$.

Найдите область значений функции:

7.41. а) $y = 1 - 2x$;

б) $y = 1 - 2x^2$;

в) $y = 3x^2 - 12x + 1$;

г) $y = -3x^2 - 12x + 1$, $x \in [-6, 1)$.

○**7.42.** а) $y = 1 - \frac{2}{x}$; в) $y = \frac{3}{x} - 12$;

б) $y = \frac{x-1}{x+1}$; г) $y = \frac{4x}{12x+5}$.

○**7.43.** а) $y = \sqrt{x} + 5$; в) $y = 2 - \sqrt{x+3}$;

б) $y = 1 - 2\sqrt{3-x}$; г) $y = -1 + 2\sqrt{-5-10x}$.

○**7.44.** а) $y = 2 + \frac{x}{|x|}$; в) $y = 2x - \frac{x}{|x|}$;

б) $y = x^2 + 2x - \frac{x}{|x|}$; г) $y = x^2 - 2x + \frac{x+1}{|x+1|}$.

●**7.45.** Найдите область значений функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|x-3|}{x-3}$;

б) $f(x) = \frac{|x|}{x} - \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} - \frac{|x-3|}{x-3}$.

○**7.46.** а) Докажите, что все значения функции $y = 5x + 3$ положительны в окрестности точки 0 (см. упражнение 4.21) радиусом 0,2.

б) Докажите, что в 0,5-окрестности точки -1 (см. упражнение 4.21) найдутся как положительные, так и отрицательные значения функции $y = 5x + 3$.

○**7.47.** Пусть область значений функции $y = f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите множество значений функции:

а) $y = (f(x))^2$; в) $y = (f(x))^3$;

б) $y = |f(x)|$; г) $y = \sqrt{4 + f(x)}$.

○**7.48.** Пусть область значений функции $y = f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите множество значений функции:

а) $y = f(x + 5)$; в) $y = 5 - f(x)$;

б) $y = 5 - f(x + 5)$; г) $y = a - f(x + b)$.

7.49. Пусть область значений функции $y = f(x - 5)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите множество значений функции:

а) $y = f(x)$;
б) $y = 5 - f(x + 5)$;
в) $y = 5 - f(x)$;
г) $y = a - f(x + b)$.

7.50. Пусть область значений функции $y = f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите все целочисленные значения функции:

а) $y = \dfrac{7}{5 + f(x)}$;
б) $y = \dfrac{8 + f(x)}{7 + f(x)}$;
в) $y = \dfrac{15}{7 - f(x)}$;
г) $y = \dfrac{f(x)}{6 - f(x)}$.

7.51. Найдите область значений функции:

а) $y = |x| \cdot (x - 6) - 2$;
б) $y = x \cdot |x - 6| - 2$.

7.52. Выполните в указанном порядке задания а) и б) и, обобщив их результаты, предложите *алгоритм* нахождения множества $E(f)$ значений функции $y = f(x)$, исследуя вопрос существования корней уравнения $f(x) = a$, а также предложите *алгоритм* исследования существования корней уравнения $f(x) = a$, если известно $E(f)$.

а) Найдите область значений функции $y = x^2 - 4x - 1$ и определите, при каких значениях параметра b уравнение $b = x^2 - 4x - 1$ имеет хотя бы один корень.

б) Определите, при каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 4x - 3 = a$ имеет хотя бы один корень, и найдите область значений функции $y = x^2 + 4x - 3$.

7.53. а) Определите, при каких значениях параметра a уравнение $x^2 - ax + 3 = 0$ имеет корни, и найдите область $E(f)$ значений функции $y = \dfrac{x^2 + 3}{x}$;

б) определите, при каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - 4x + a = 0$ имеет корни, и найдите область $E(f)$ значений функции $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

7.54. Найдите область значений функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x}$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x + 1}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$;

г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$.

7.55. Найдите наименьшее целое число, принадлежащее области значений функции:

а) $y = \sqrt{x^2 - 7x - 3}$;

б) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 24}$.

7.56. а) Пусть $|x - 1| = 5$. Найдите все возможные значения выражения $\sqrt{\dfrac{2|x + 4|}{x^2 - x - 10}}$.

б) Пусть $|x - 1| < 5$. Найдите все возможные значения выражения $\sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 5}{29}}$.

Постройте график функции. Для каждой функции укажите область определения, множество значений, промежутки монотонности, нули функции:

7.57. а) $y = |x - 5|$;

б) $y = |x + 3| + |1 - x|$;

в) $y = 2 - |1 - x|$;

г) $y = |x + 3| - |1 - x|$.

7.58. а) $y = |x - 5| \cdot (x + 3)$;

б) $y = |x + 3| \cdot |1 - x|$.

7.59. а) $y = \left|2 - \sqrt{5 - x}\right|$;

б) $y = 2 - \sqrt{5 - |x|}$;

в) $y = \left|2 - \sqrt{5 + x}\right|$;

г) $y = \left|2 - \sqrt{5 + |x|}\right|$.

7.60. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = 2 + |x + 5|$;

б) $y = |x - 2| + |x + 5|$;

в) $y = |x - 2| - |x + 5|$;

г) $y = |x - 2| \cdot |x + 5|$.

7.61. На рисунке 10 изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график уравнения:

а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$; в) $|y| = f(x)$; г) $|y| = f(|x|)$.

Выполните аналогичные задания для функций $y = g(x)$ (рис. 11), $y = h(x)$ (рис. 12) и $y = \varphi(x)$ (рис. 13).

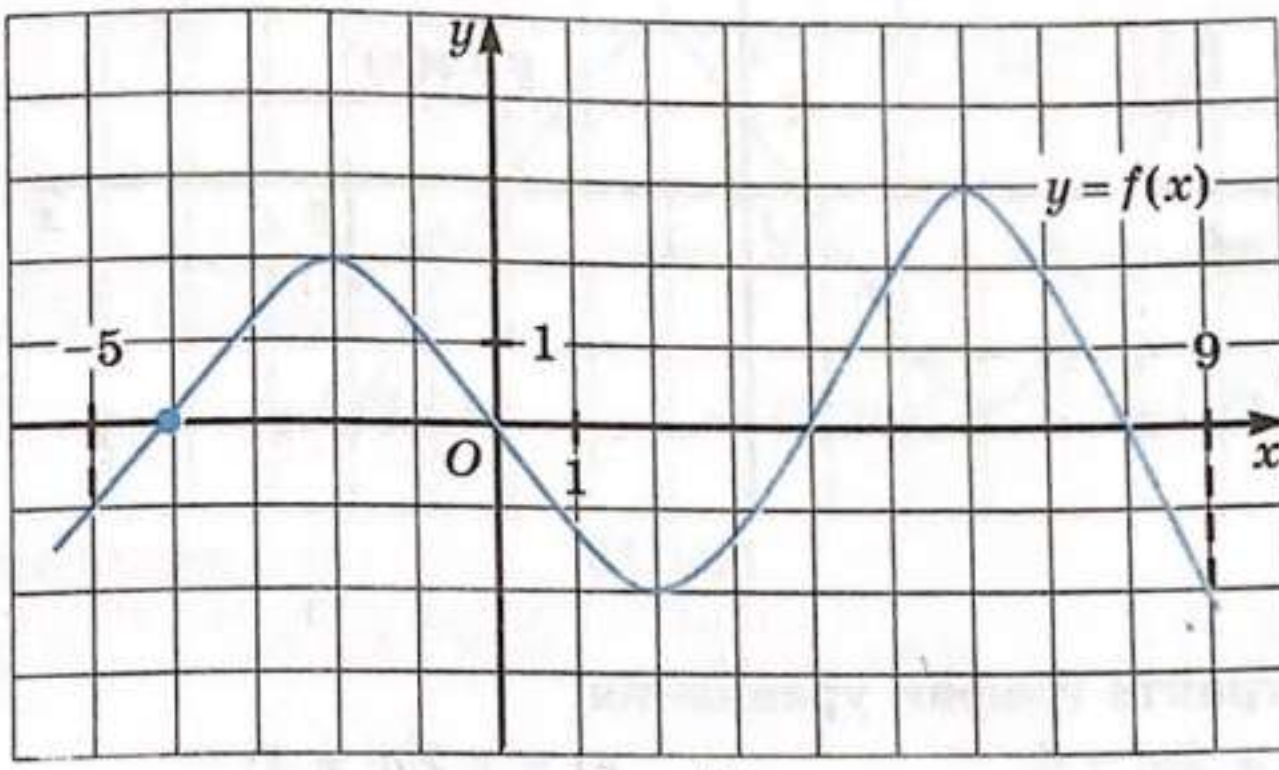


Рис. 10

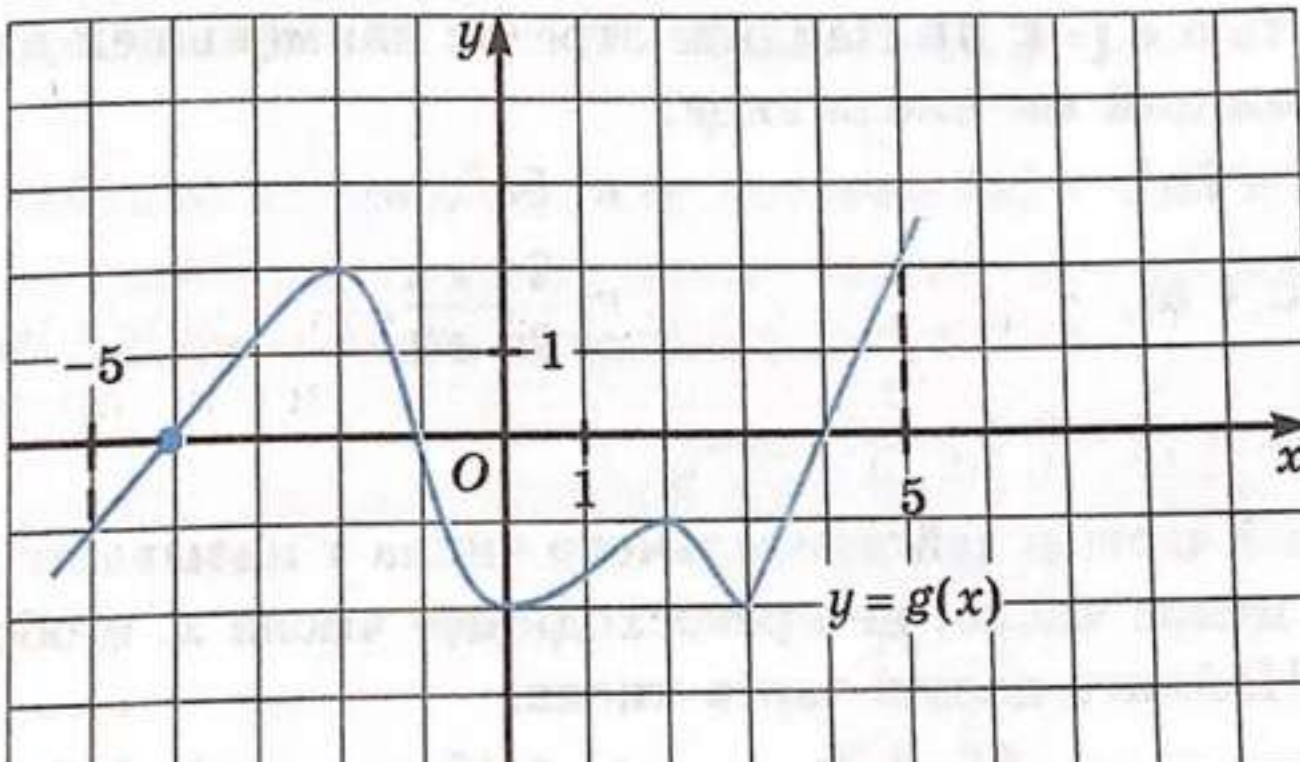


Рис. 11

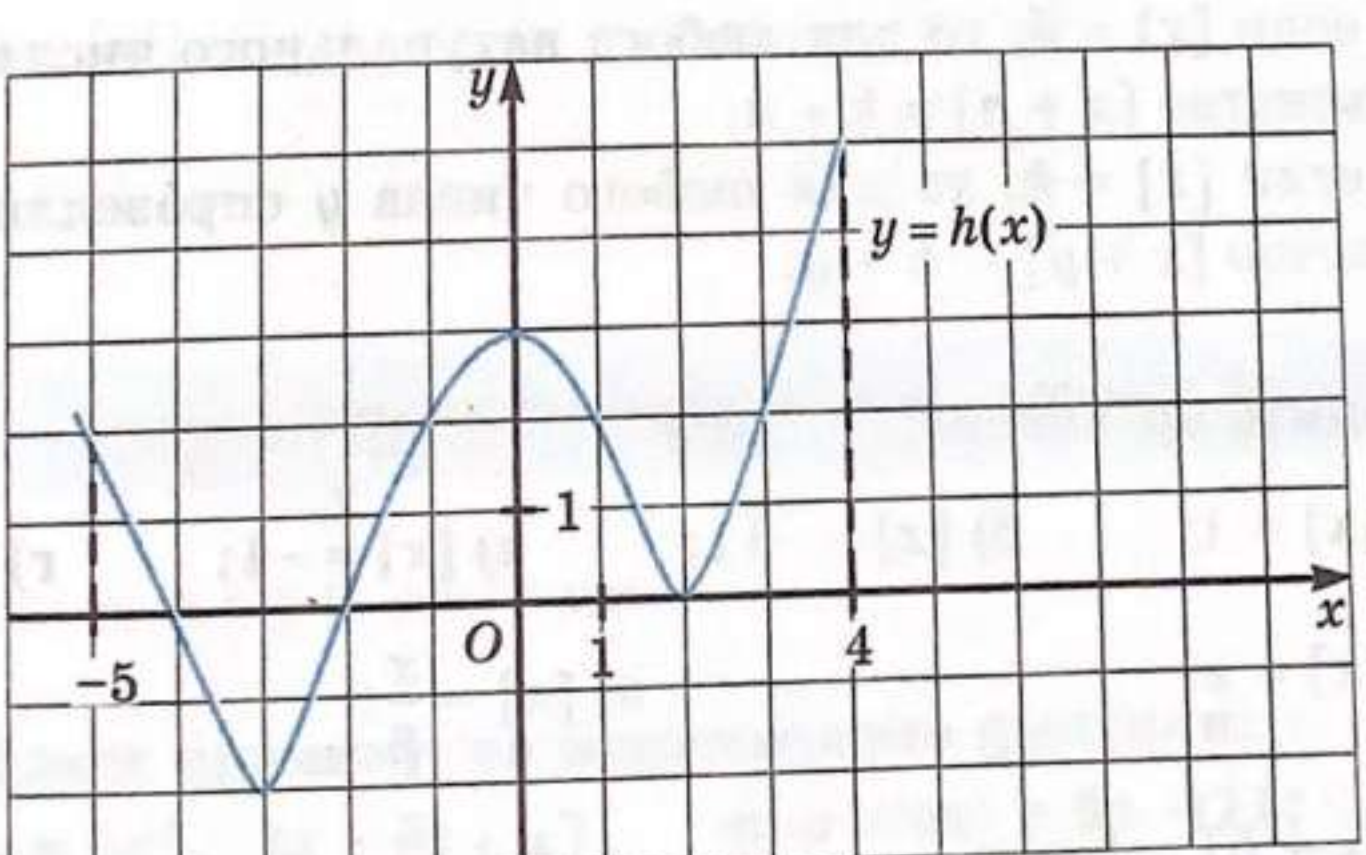


Рис. 12

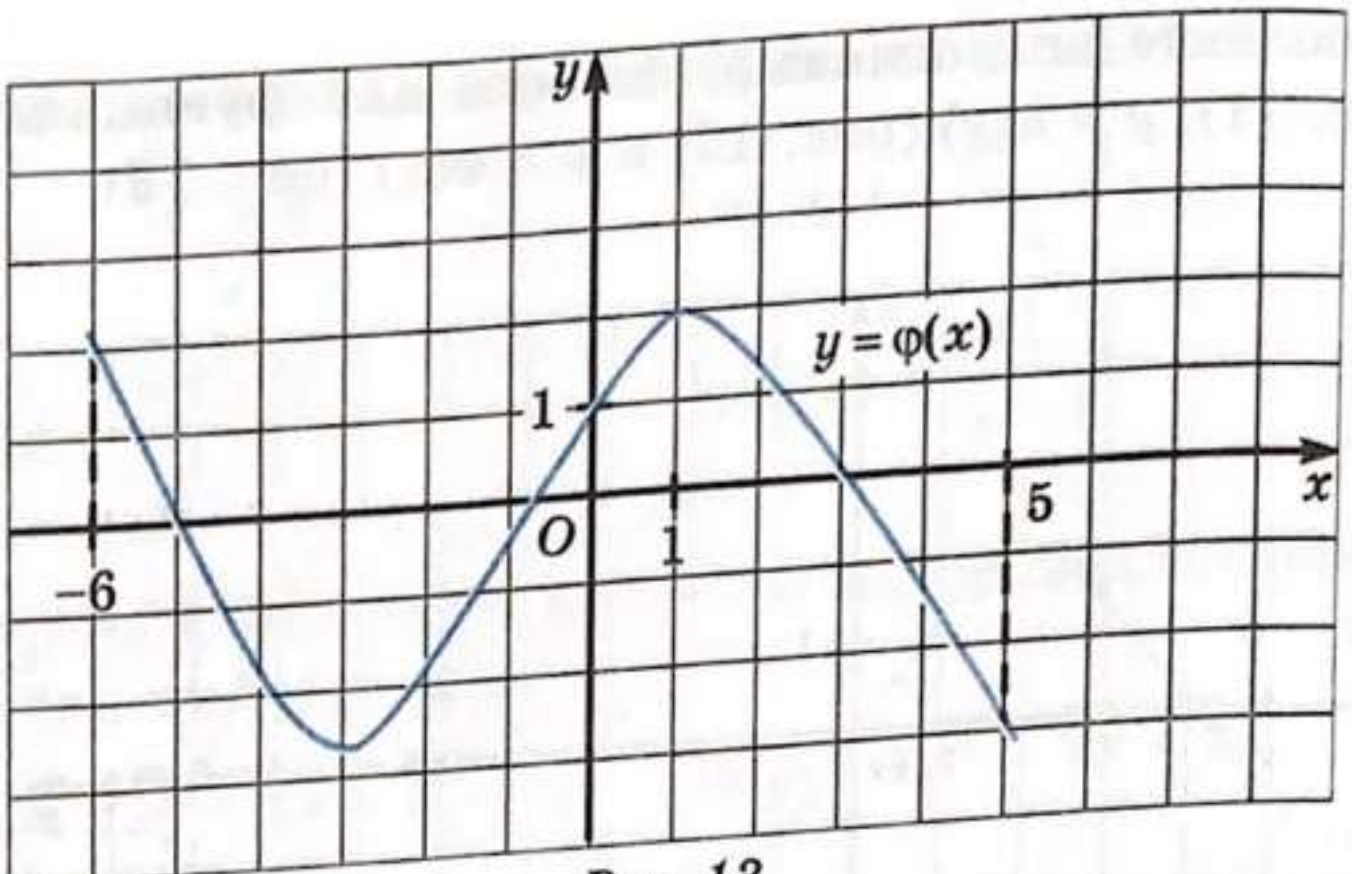


Рис. 13

●7.62. Постройте график уравнения:

а) $|x + 2y| = 4$;

б) $|x| + 2y = 4$;

в) $x + 2|y| = 4$;

г) $|x| + 2|y| = 4$.

●7.63. Пусть $\alpha \in [-4; 0]$. Найдите отрезок наименьшей длины, содержащий все числа вида:

а) $1 + 2\alpha^2$;

б) $5\alpha + \alpha^2$;

в) $5\alpha^3$;

г) $\dfrac{2\alpha + 1}{3\alpha - 1}$.

69 **Прочитайте п. 4 в § 7 учебника.**

7.64. Целой частью действительного числа x называют наибольшее целое число, не превосходящее числа x, и обозначают $[x]$. Найдите целую часть числа:

а) 4; б) −3,2; в) 4,45; г) −3,3456.

○7.65. Докажите:

а) если $[x] = k$, то для любого натурального числа n верно равенство $[x + n] = k + n$;

б) если $[x] = k$, то для любого числа y справедливо неравенство $[x + y] \leqslant k + y$.

Решите уравнение:

○7.66. а) $[x] = 1$; б) $[x] = -11$; в) $[x] = -1$; г) $[x] = 11$.

●7.67. а) $[x] = x$;

б) $[x + 5] = 1 - x$;

в) $[x] = \dfrac{x}{2}$;

г) $\left[\dfrac{x + 1}{4}\right] = x + 2$.

7.68. Постройте на координатной плоскости xOy график соотношения:

а) $[x] = [y]$;

б) $[x] > [y]$;

в) $[x] < [y]$;

г) $[x - 1] > [y + 1]$.

7.69. Дробной частью действительного числа x называют разность $x - [x]$; дробную часть числа x обозначают символом $\{x\}$. Вычислите:

а) $\{2\}$; б) $\{12{,}81\}$; в) $\{1{,}08\}$; г) $\{\sqrt{2}\}$.

7.70. Вычислите:

а) $\{-2\}$; б) $\{-12{,}81\}$; в) $\{-1{,}08\}$; г) $\{-\sqrt{2}\}$.

7.71. Пусть $\omega \in [0; 1)$. Докажите, что для любого натурального числа a верно равенство:

а) $\{a + \omega\} = \omega$;

б) $\{a - \omega\} = 1 - \omega$.

7.72. а) Найдите все числа x, для которых $\{x\} = 0{,}123$;

б) найдите наибольшее целое число, не превосходящее 1000, дробная часть которого равна 0,123.

7.73. Постройте график заданной функции на отрезке $[-4; 4]$:

а) $y = [x]$;

б) $y = [1 - x]$;

в) $y = [x + 4]$;

г) $y = \left[\dfrac{1 - x}{2}\right]$.

7.74. Постройте график заданной функции на отрезке $[-4; 4]$:

а) $y = \{x\}$;

б) $y = \{1 - x\}$;

в) $y = \{x + 4\}$;

г) $y = \left\{\dfrac{1 - x}{2}\right\}$.

§ 8 СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Прочитайте п. 1 в § 8 учебника.

72

8.1. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = 2x^2 - 3x + 4$;

б) $y = \sqrt{1 - x}$;

в) $y = 5x^2 + 6x - 11$;

г) $y = \sqrt{3 + 5x}$.

○**8.2.** Докажите:

а) если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X и $a > 0$, то при любом значении b функция $y = a \cdot f(x) + b$ возрастает на X;

б) если функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X и $a < 0$, то при любом значении b функция $y = a \cdot f(x) + b$ возрастает на X;

в) если функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X и $a > 0$, то при любом значении b функция $y = a \cdot f(x) + b$ убывает на X;

г) если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X и $a < 0$, то при любом значении b функция $y = a \cdot f(x) + b$ убывает на X.

○**8.3.** Докажите:

а) если каждая из двух функций возрастает на промежутке X, то их сумма также возрастает на этом промежутке;

б) если каждая из двух функций убывает на промежутке X, то их сумма также убывает на этом промежутке.

○**8.4.** Определите промежутки монотонности функции:

а) $y = 4 - 3\sqrt{x - 5}$;
в) $y = -3 + 5\sqrt{2 - x}$;
б) $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{2x - 3}$;
г) $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{3 - 4x}$.

○**8.5.** а) Пусть функция $y = f(x)$ возрастает и принимает только положительные значения на промежутке X. Докажите, что функция $y = (f(x))^2$ возрастает на промежутке X.

б) Пусть функция $y = f(x)$ убывает и принимает только положительные значения на промежутке X. Докажите, что функция $y = (f(x))^2$ убывает на промежутке X.

в) Пусть функция $y = f(x)$ возрастает и принимает только отрицательные значения на промежутке X. Докажите, что функция $y = (f(x))^2$ убывает на промежутке X.

г) Пусть функция $y = f(x)$ убывает и принимает только отрицательные значения на промежутке X. Докажите, что функция $y = (f(x))^2$ возрастает на промежутке X.

○**8.6.** Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = (x^2 + 1)^2$;
в) $y = (x^2 - 3x + 10)^2$;
б) $y = x^4 + 6x^2 + 15$;
г) $y = (x^2 + 2)^2 - 2x^2 - 3$.

○**8.7.** Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = (x^2 - 1)^2$;

б) $y = (x^2 - 9)^2 + 6$;

в) $y = (x^2 - 3x - 10)^2$;

г) $y = (x^2 - x - 20)^2 - 18$.

8.8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите промежутки монотонности функции $y = (f(x))^2$:

а) рис. 14; б) рис. 15; в) рис. 16; г) рис. 17.

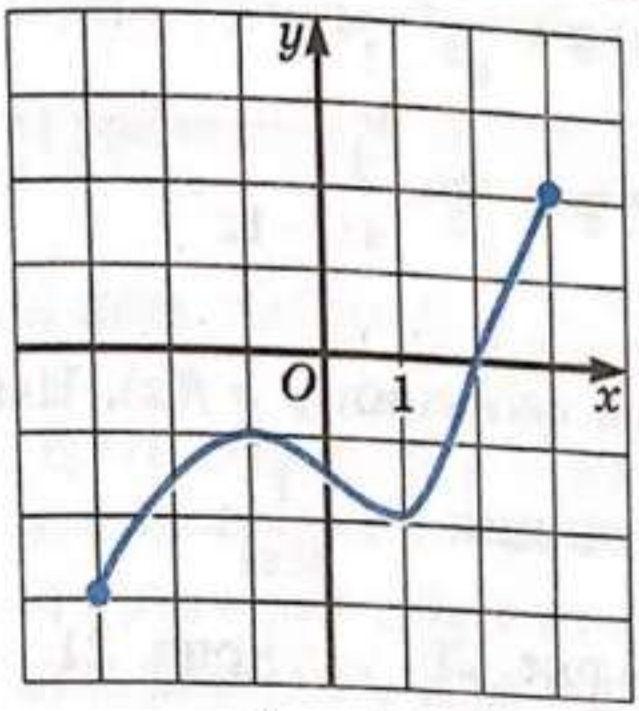


Рис. 14

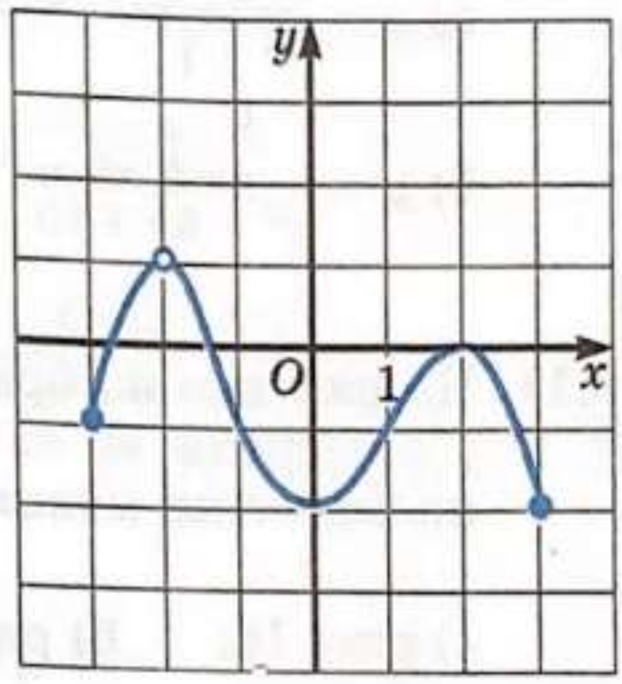


Рис. 15

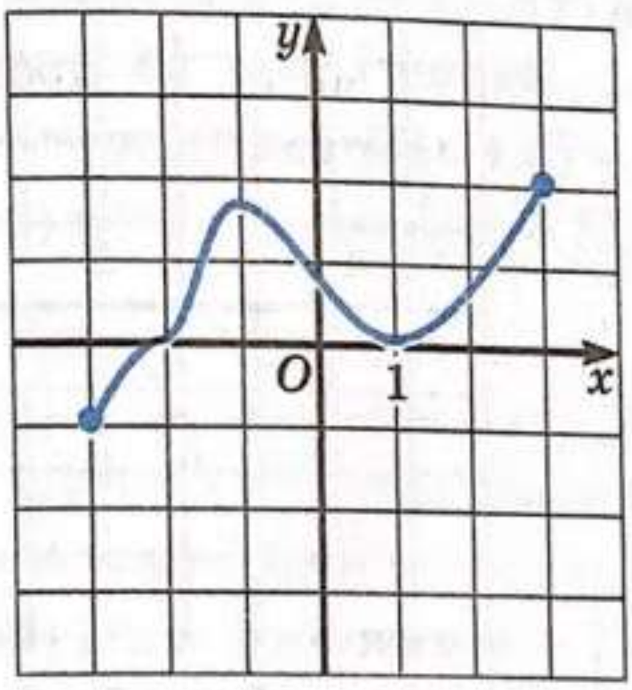


Рис. 16

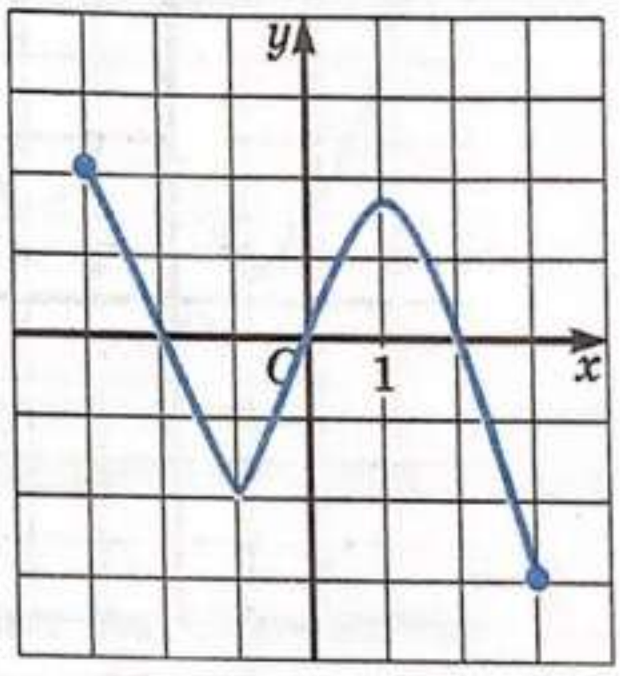


Рис. 17

○**8.9.** а) Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на X и принимает на X только положительные значения. Докажите, что функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ убывает на X.

б) Пусть функция $y = f(x)$ убывает на X и принимает на X только отрицательные значения. Докажите, что функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ возрастает на X.

в) Пусть функция $y = f(x)$ убывает на X и принимает на X только положительные значения. Докажите, что функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ возрастает на X.

г) Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на X и принимает на X только отрицательные значения. Докажите, что функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ убывает на X.

○**8.10.** Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = \dfrac{1}{x^4 + 1}$;

в) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2 + 6x + 10}$;

г) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x - 12}$.

○**8.11.** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите промежутки монотонности функции $y = \dfrac{1}{f(x)}$:

а) рис. 18; б) рис. 19; в) рис. 20; г) рис. 21.

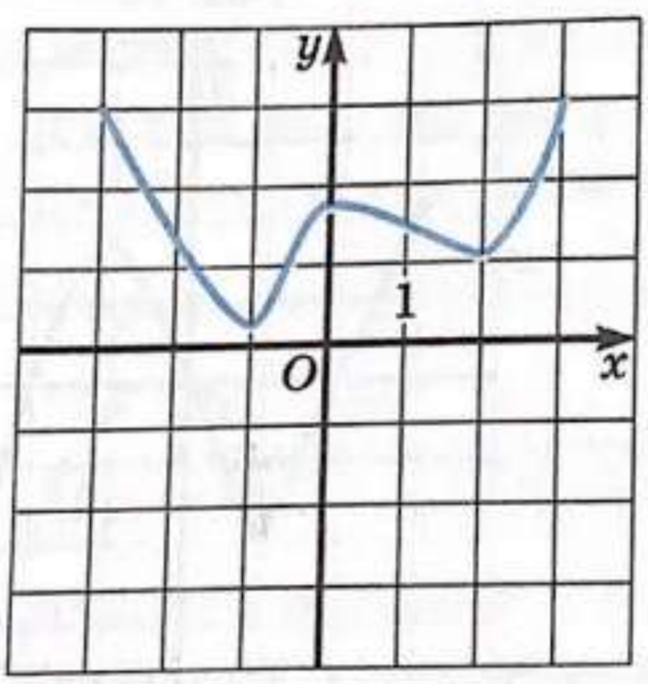


Рис. 18

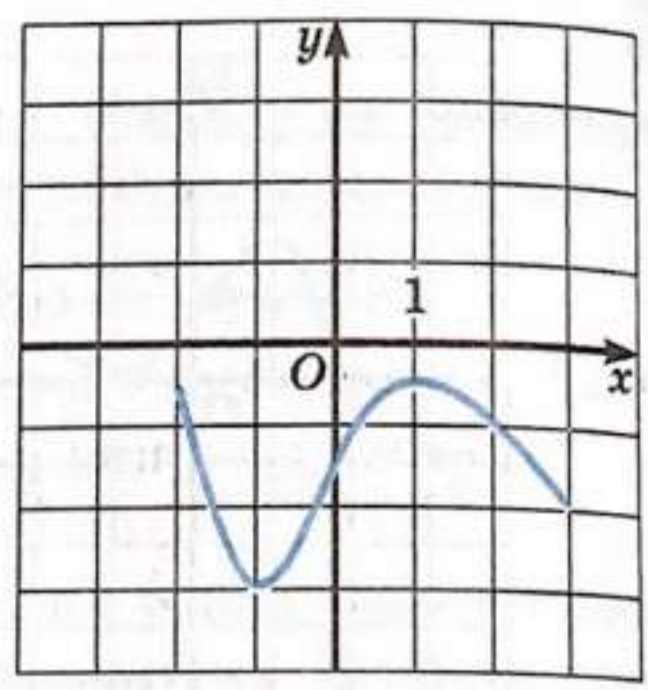


Рис. 19

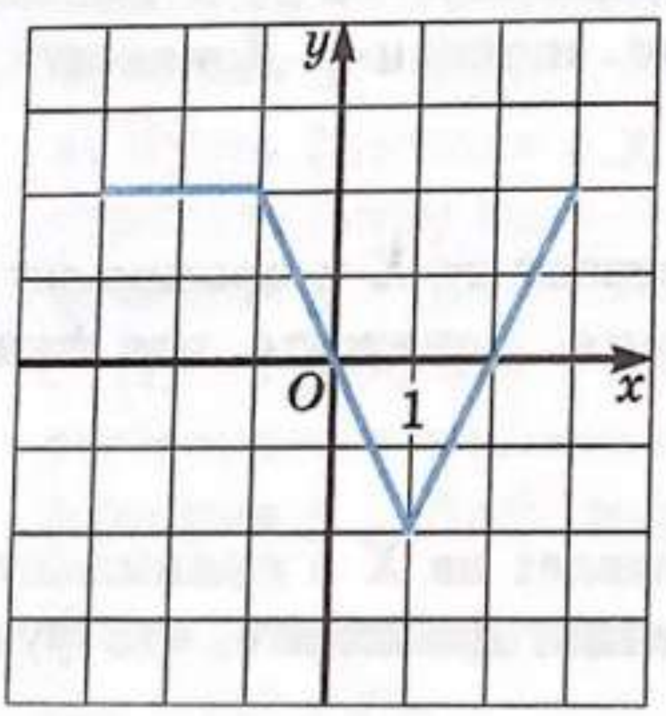


Рис. 20

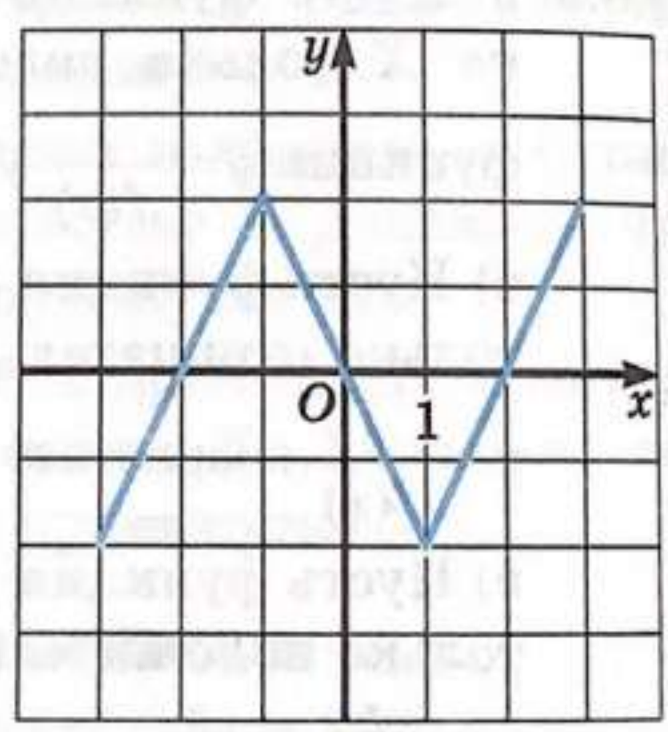


Рис. 21

8.12. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на $\mathbf{R}$. Решите:

а) уравнение $f(3x + 2) = f(4x^2 + x)$;

б) неравенство $f(3x + 2) < f(4x^2 + x)$;

в) уравнение $f(3x - 48) = f(-x^2 + x)$;

г) неравенство $f(3x - 48) \leqslant f(-x^2 + x)$.

8.13. Пусть функция $y = f(x)$ убывает на $\mathbf{R}$. Решите:

а) уравнение $f\left(\dfrac{1}{3x^2 + 4x - 7}\right) = f\left(\dfrac{1}{2x^2 + 3x - 5}\right)$;

б) неравенство $f\left(\dfrac{1}{3x^2 + 4x - 7}\right) \geqslant f\left(\dfrac{1}{2x^2 + 3x - 5}\right)$.

8.14. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-1; 1)$ и возрастает на нём. Решите:

а) уравнение $f(3x + 2) = f(4x^2 + x)$;

б) неравенство $f(3x + 2) < f(4x^2 + x)$.

8.15. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-1; 1]$ и убывает на нём. Решите:

а) уравнение $f(3x + 2) = f(4x^2 + x)$;

б) неравенство $f(3x + 2) < f(4x^2 + x)$.

8.16. Докажите:

а) если функция $y = f(x)$ возрастает или убывает на промежутке X, то уравнение $f(x) = a$ не может иметь более одного корня на X;

б) если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X, а функция $y = g(x)$ убывает на промежутке X, то уравнение $f(x) = g(x)$ не может иметь более одного корня на X.

Решите уравнение:

8.17. а) $x^3 = 2 - x$; в) $\sqrt{x + 1} = 5 - x$;

б) $x^3 = 10 - x$; г) $3x = \sqrt{10 - x}$.

8.18. а) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 5} = 23 - 2x$;

б) $\dfrac{5}{x + 1} = 8\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 3} = 43 - 6x - x^2$;

г) $(x^2 + 4x + 9)\sqrt{4x + 1} = 9$.

73 Прочитайте пп. 2—3 в § 8 учебника.

8.19. Для функций, графики которых изображены на рисунках 14—17, найдите экстремумы, а также наибольшие и наименьшие значения.

8.20. Докажите: если функция имеет наибольшее и наименьшее значения на множестве M, то она ограничена на этом множестве.

○**8.21.** Убедитесь, что функция, график которой изображён на заданном рисунке, не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений; задайте эту функцию аналитически:
а) рис. 22; б) рис. 23.

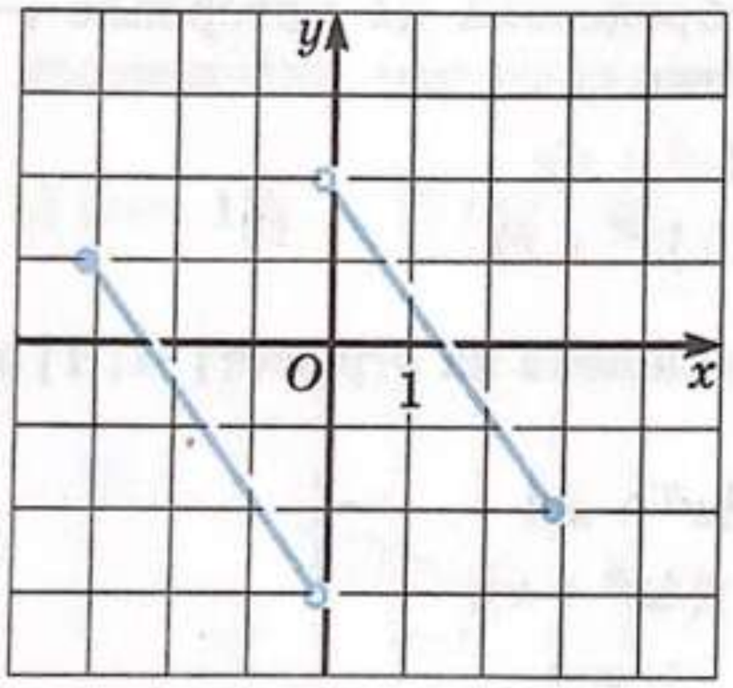


Рис. 22

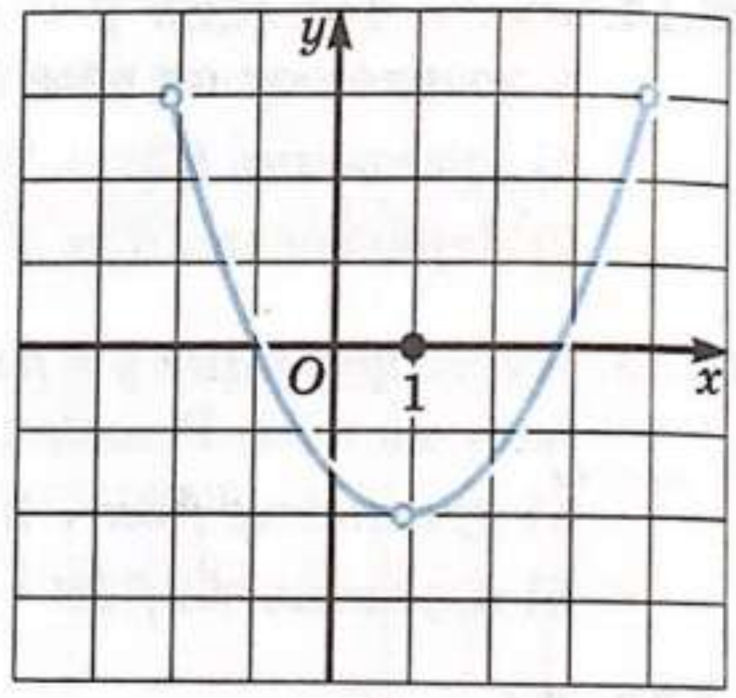


Рис. 23

8.22. а) Приведите пример функции, определённой во всех точках отрезка $[a;\ b]$, ограниченной на этом отрезке, но не имеющей ни наибольшего, ни наименьшего значений на отрезке $[a;\ b]$.
б) Приведите пример функции, определённой и ограниченной на $\boldsymbol{R}$, но не имеющей ни наибольшего, ни наименьшего значений на $\boldsymbol{R}$.

○**8.23.** Докажите: если функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;\ b]$, имеет на нём наибольшее и наименьшее значения, а отрезок $[a_1;\ b_1]$ является частью отрезка $[a;\ b]$, то:
а) $y_{\text{наиб}}$ на $[a;\ b]$ не меньше $y_{\text{наиб}}$ на $[a_1;\ b_1]$;
б) $y_{\text{наим}}$ на $[a;\ b]$ не больше $y_{\text{наим}}$ на $[a_1;\ b_1]$.

○**8.24.** Докажите: если функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;\ b]$, имеет на нём наибольшее и наименьшее значения, причём $y_{\text{наиб}} = y_{\text{наим}}$, то функция является постоянной на отрезке $[a;\ b]$.

○**8.25.** Докажите, что если $y = x + \frac{1}{x}$, то:

а) при $x < 0$ $y_{\text{наиб}} = -2$; б) при $x > 0$ $y_{\text{наим}} = 2$.

○**8.26.** Найдите наибольшее и/или наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 24x - 100$:

а) на отрезке $[-1; 5]$; в) на луче $[0; +\infty)$;

б) на луче $(-\infty; 0]$; г) на $\boldsymbol{R}$.

○**8.27.** Найдите наибольшее и/или наименьшее значение функции $y = -2x^2 - 12x + 3$:

а) на отрезке $[-1; 3]$; в) на луче $[-4; +\infty)$;

б) на луче $(-\infty; -4]$; г) на $\boldsymbol{R}$.

○**8.28.** Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = \frac{2}{x^2 + 1}$; в) $y = \frac{2}{x^2 - 4x + 10}$;

б) $y = \frac{2}{x^4 + 8x^2 + 1}$; г) $y = \frac{2}{x^4 - 8x^2 + 17}$.

●**8.29.** Используя результаты упражнения **8.25**, найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$; в) $y = \frac{10x}{x^2 + 4}$;

б) $y = \frac{4x - 4}{x^2 - 2x + 17}$; г) $y = \frac{49(x - 2)}{x^2 - 4x + 53}$.

●**8.30.** Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = |x| + |x - 2|$;

б) $y = |x - 1| + |x - 3| + |x - 5|$;

в) $y = |x| + |x - 2| + |x - 4|$;

г) $y = |x| + |x - 1| + \ldots + |x - n|$, $n \in \boldsymbol{N}$.

○**8.31.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции для каждого значения параметра a:

а) $y = x^2 + 4x + 5a$ на отрезке $[-1; 1]$;

б) $y = -x^2 + 4x - a$ на отрезке $[-1; 3]$.

●**8.32.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции для каждого значения параметра a:

а) $y = x^2 - 4x$ на отрезке $[-1; a]$;

б) $y = -x^2 + 2x - 3$ на отрезке $[a; 3]$.

●8.33. а) Функция $y = \dfrac{15x^2 + 60}{x^4 - 16}$ определена только для допустимых целых значений x; найдите её наибольшее значение.

б) Функция $y = \dfrac{14x^2 + 126}{81 - x^4}$ определена только для допустимых целых значений x; найдите её наименьшее значение.

●8.34. Докажите теорему: если функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ определены на множестве X и наибольшее значение одной из этих функций на X, равное A, совпадает с наименьшим значением другой функции на том же множестве, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно на X системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

●8.35. Опираясь на теорему из упражнения **8.34**, решите уравнение:

а) $\sqrt{x^{100} + 49} = 7 - x^4$;

б) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 1 + 2x - x^2$;

в) $\sqrt{x^{22} + 64} = 8 - x^{12} - x^{14}$;

г) $\sqrt{-x^2 - 4x - 1} = x^2 + 4x + 7$.

80 **Прочитайте пп. 4—5 в § 8 учебника.**

8.36. Определите, какие из функций, графики которых приведены на рис. 24—29, являются чётными, нечётными или функциями общего вида.

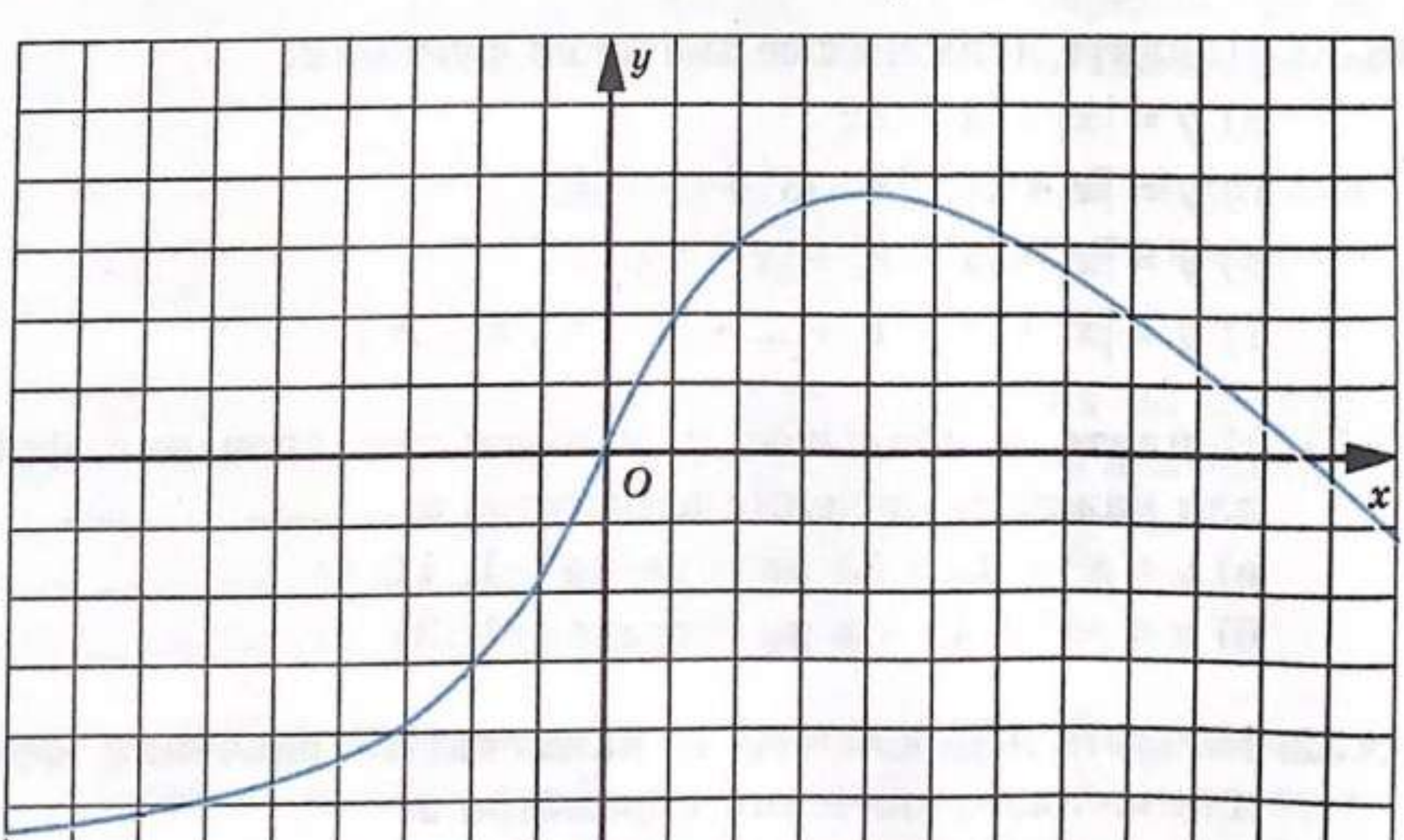


Рис. 24

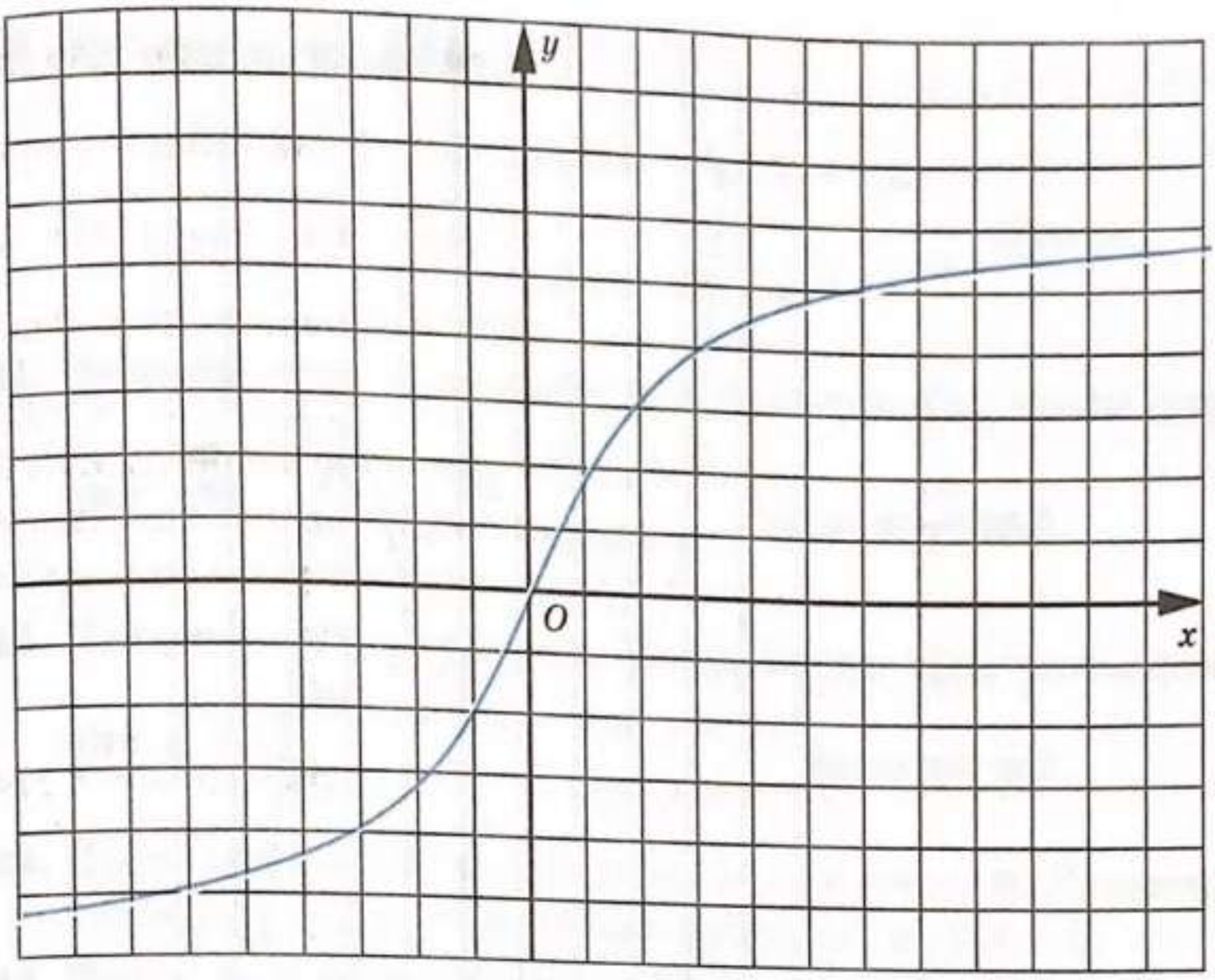


Рис. 25

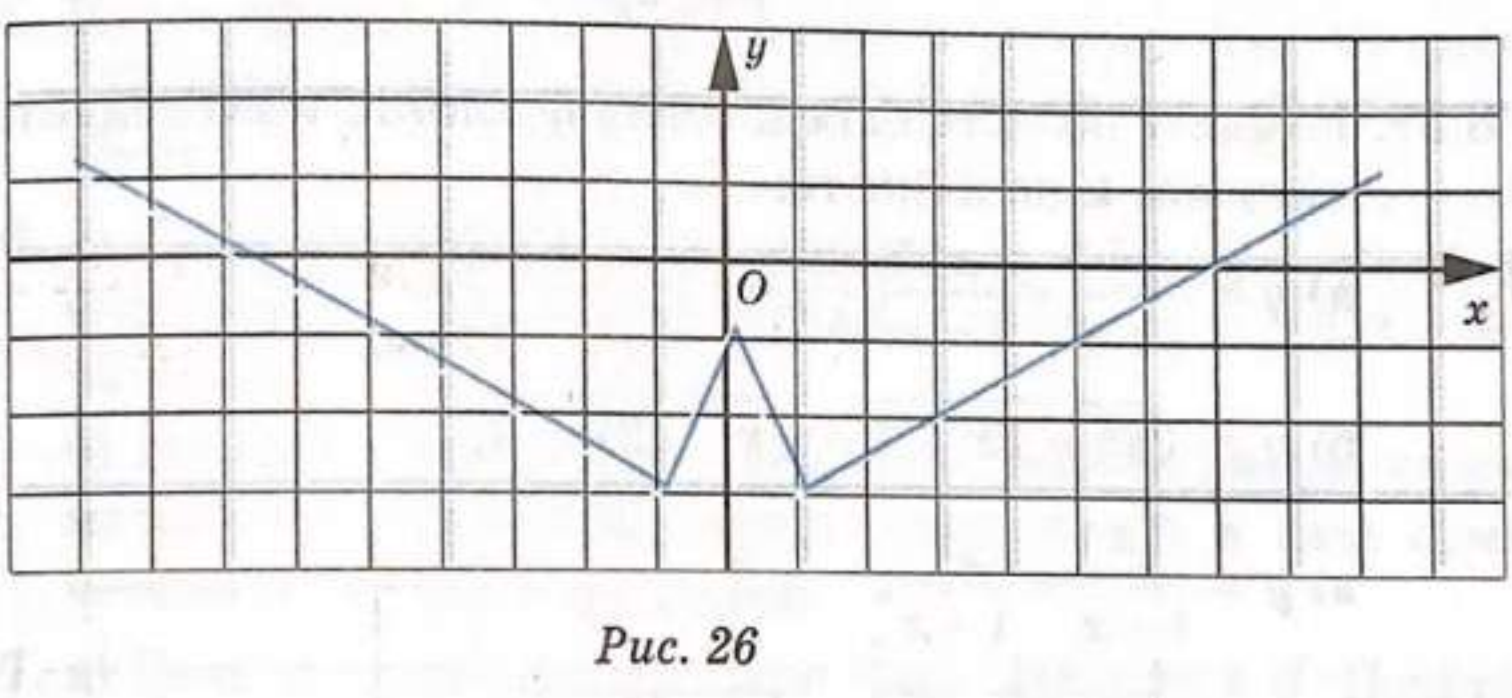


Рис. 26

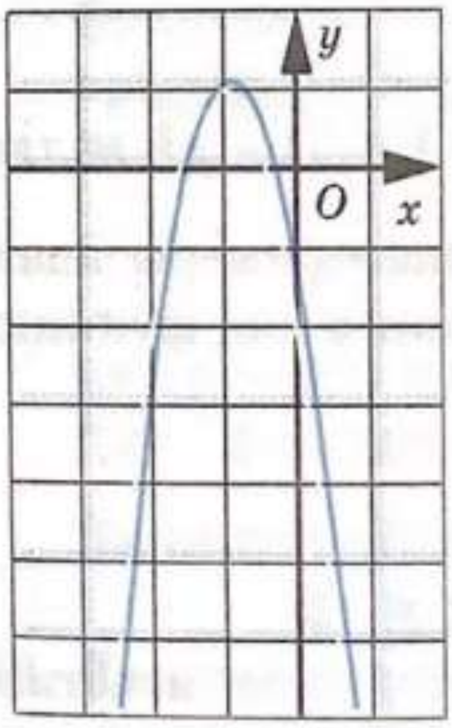


Рис. 27

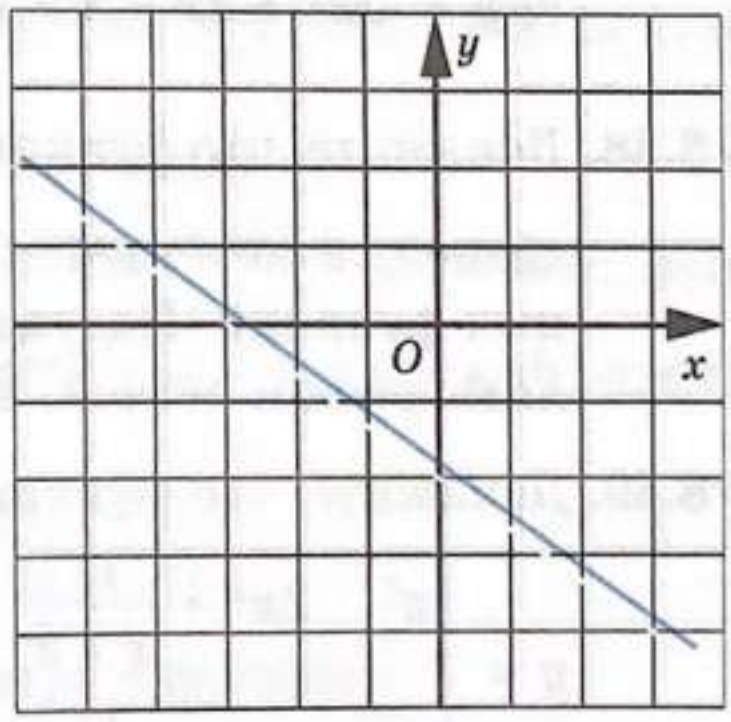


Рис. 28

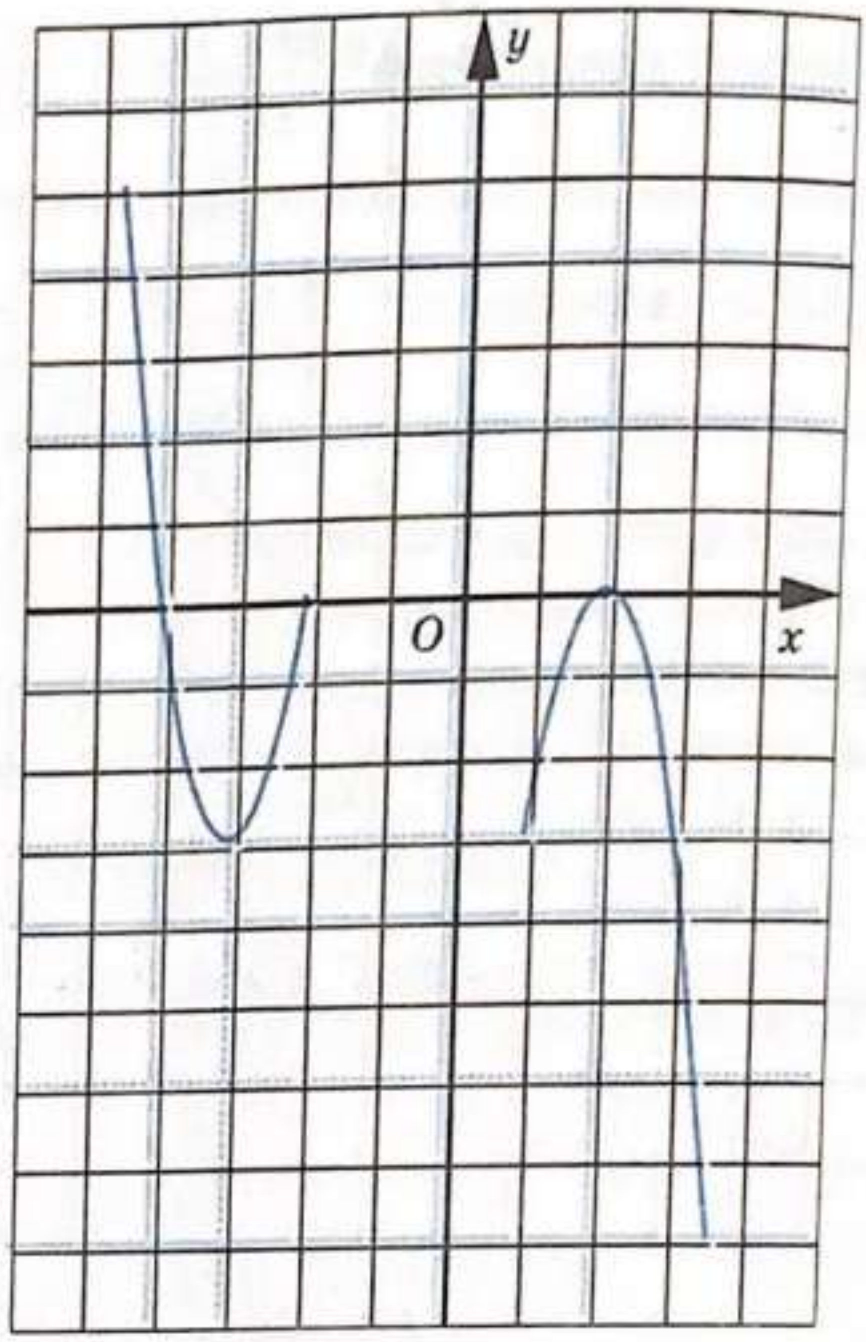


Рис. 29

8.37. Найдите область определения функции и исследуйте её на чётность и нечётность:

а) $y = \dfrac{x^2}{1+x} + \dfrac{x^2}{1-x}$;

б) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$;

в) $y = \dfrac{x^2}{1+x} - \dfrac{x^2}{1-x}$;

г) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

○**8.38.** Докажите, что функция $y = 2\sqrt{x^4 - 1} + \sqrt[4]{1 - x^2}$ является и чётной, и нечётной. Придумайте ещё примеры аналогичных функций. Подумайте, какой общий вид функции, являющейся и чётной, и нечётной.

○**8.39.** Докажите, что функция

$$y = \begin{cases} x^4 - 2x^2 + \dfrac{17}{x+2} & \text{при } x < 0 \text{ и } x \neq -2; \\ 2x^2 - x^4 + \dfrac{17}{x-2} & \text{при } x > 0 \text{ и } x \neq 2 \end{cases} \text{ — нечётная.}$$

○**8.40.** Докажите, что функция

$$y = \begin{cases} x^4 - 2x^2 + \dfrac{17}{x+1} & \text{при } x < 0 \text{ и } x \neq -1; \\ x^4 - 2x^2 + \dfrac{17}{1-x} & \text{при } x > 0 \text{ и } x \neq 1 \end{cases} \quad \text{— чётная.}$$

○**8.41.** Найдите такое выражение для функции $f(x)$, чтобы функция $y = \begin{cases} f(x) & \text{при } x < 0; \\ \dfrac{x^2 - 19x}{x^3 + 7} & \text{при } x \geqslant 0 \end{cases}$ была нечётной.

○**8.42.** Найдите такое выражение для функции $h(x)$, чтобы функция $y = \begin{cases} x^2 - \sqrt{3 - x} & \text{при } x < 0; \\ h(x) & \text{при } x \geqslant 0 \end{cases}$ была чётной.

8.43. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке 0. Докажите, что если $y = f(x)$ — нечётная функция, то $f(0) = 0$.

8.44. Пусть график нечётной функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс в 33 точках. Докажите, что $f(0) = 0$.

8.45. Пусть график чётной функции пересекает ось абсцисс в 333 точках. Найдите сумму и произведение абсцисс этих точек.

○**8.46.** а) Пусть функция $y = f(x)$ определена на $\boldsymbol{R}$. Докажите, что функция $y = f(x) + f(-x)$ чётная, а функция $y = f(x) - f(-x)$ нечётная.

б) Докажите, что любую функцию, определённую на симметричном множестве, можно представить в виде суммы чётной и нечётной функций.

●**8.47.** а) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Нечётная функция $y = g(x)$ определена на всей числовой прямой, причём $f(x) = g(x)$ при $x \geqslant 0$.

Вычислите $h(-2)$, где $h(x) = f(x) + g(x)$.

б) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \dfrac{5x + 1}{x^2 + 1}$. Чётная функция $y = g(x)$ определена на всей числовой прямой, причём $f(x) = g(x)$ при $x \leqslant 0$.

Вычислите $h(1)$, где $h(x) = \dfrac{2f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)}$.

○**8.48.** При каком значении параметра a функция $y = x^2(ax + 2a - 6)$ является:

а) чётной; б) нечётной?

8.49. Функция $y = f(x)$ определена на $\boldsymbol{R}$, причём $f(x - 3) = ax^2 + x$. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $y = f(x)$ чётная.

8.50. Функция $y = f(x)$ определена на $\boldsymbol{R}$, кроме точек ± 1, причём $f(x - 1) = \dfrac{a+6}{x} + x - 1$. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $y = f(x)$ нечётная.

8.51. Дано уравнение: $5x^2 - 3|x| + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3x^2 + 4|x| + 11}{5x^2 + 1} = 6$. Докажите, что это уравнение имеет не менее двух корней, и найдите сумму всех этих корней.

§ 9 ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

9.1. Функция $y = f(x)$ — периодическая, с периодом $T = 2$. Известно, что $f(0)$. Вычислите:

а) $f(2)$;

б) $f(-22)$;

в) $f(12k + 8)$, где k — некоторое целое число;

г) $f(4 - 8k)$, где k — некоторое целое число.

9.2. Функция $y = f(x)$ — периодическая, с периодом $T = \sqrt{5}$. Известно, что $f(1) = 1$, $f(-1) = 7$. Вычислите:

а) $f\left(1 + 8\sqrt{5}\right)$; б) $f\left(-1 - 22\sqrt{5}\right)$.

9.3. Может ли областью определения периодической функции быть:

а) отрезок; в) луч;

б) интервал; г) множество целых чисел?

9.4. На рисунке изображена часть графика периодической функции с периодом T на промежутке I. Постройте график этой функции на промежутке I_1:

а) (рис. 30) $T = 3$, $I = [-1; 2]$; $I_1 = [-4; 8]$;

б) (рис. 31) $T = 3$, $I = [1; 4)$; $I_1 = [-3; 10{,}5)$;

в) (рис. 32) $T = 4$, $I = (-3; 1]$; $I_1 = (-5; 11]$;

г) (рис. 33) $T = 2$; $I = (0; 2)$; $I_1 = (-3; 6)$.

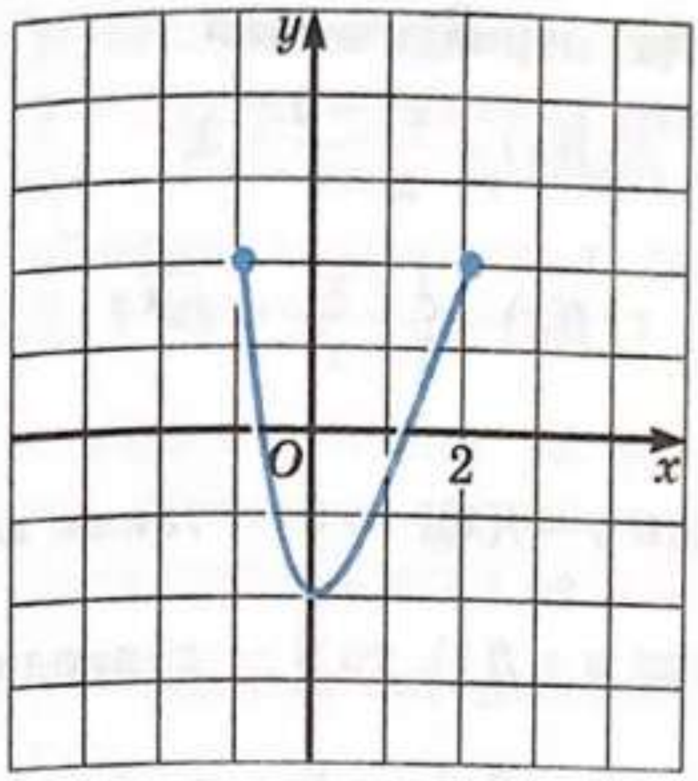


Рис. 30

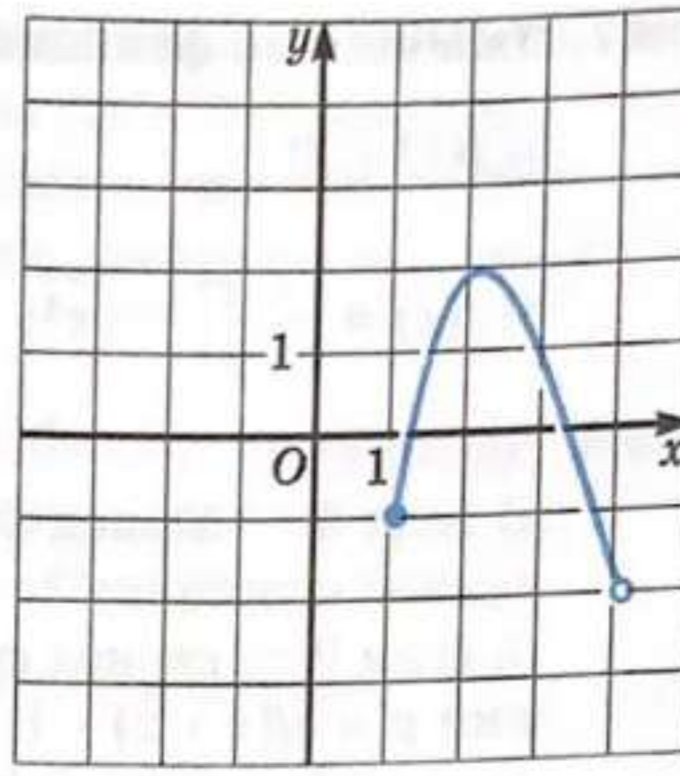


Рис. 31

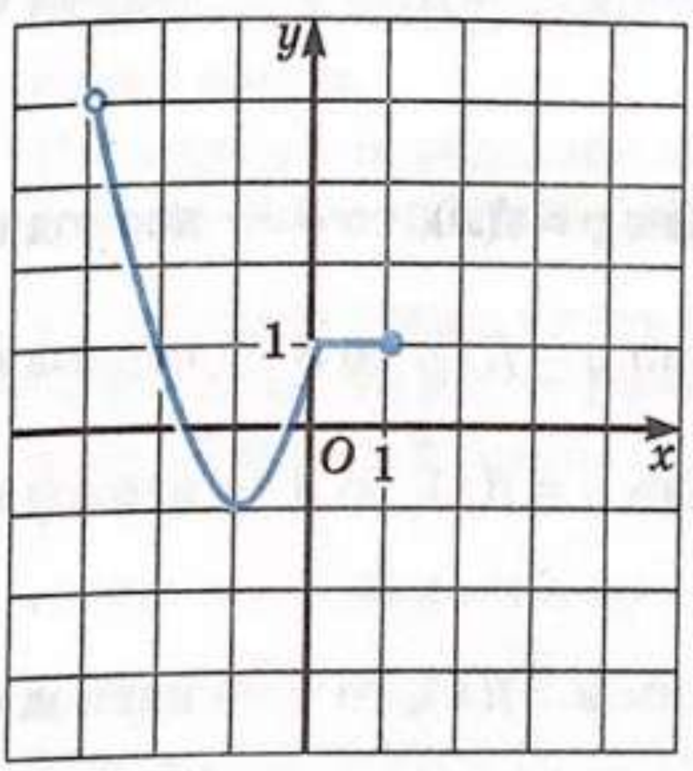


Рис. 32

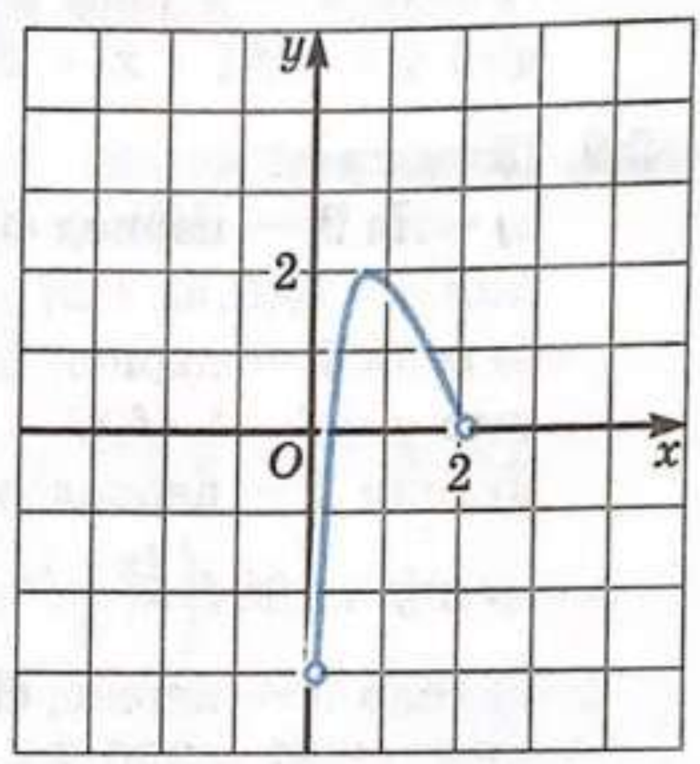


Рис. 33

○**9.5.** Пусть $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом 3, заданная для всех действительных значений x, причём $f(3) = 7$, $f(4) = 11$, $f(17) = 13$ и $f(0,1) = 0$. Вычислите:

а) $f(141)$; $f(-134)$; $f(332)$; $f(-8,9)$;

б) $f(17,3) - f(20,3)$; $f(32,(3)) - f(332,(3))$; $f(0,(1)) - f(-2,(8))$;

в) $f(10)$; $f(100)$; $f(111\,111)$;

г) $f(13,1) \cdot f(14,1) \cdot f(15,1) \cdot f(16,1)$;

$f(\underbrace{8888...88}_{n\text{ цифр}}) - f(\underbrace{2222...22}_{n\text{ цифр}})$.

○**9.6.** Пусть $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом 4, заданная для всех действительных значений x, причём $f(3) = 5$; $f(4) = 11$; $f(5) = 9$ и $f(6) = 0$. Сравните:

а) $f(1)$ и $f(31)$;

б) $f(11)$ и $f(110)$;

в) $f(-17)$ и $f(831)$;

г) $f\left(6 + \sqrt[3]{3}\right)$ и $f\left(\sqrt[3]{3} - 6\right)$.

○**9.7.** Является ли функция $y = f(x)$ периодической:

а) $f(x) = 2$;

б) $f(x) = \frac{1 - x^4}{1 - x^2} - \sqrt{x^4}$;

в) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 3$;

г) $f(x) = \frac{1 - x^4}{1 + x^2} + \sqrt{x^4}$?

○**9.8.** Докажите:

а) если 3 — период функции $y = f(x)$, то 6 — также период данной функции;

б) если 9 — период функции $y = f(x)$, то 9 — период функции $y = 5f(x + 2) - 1$;

в) если 2 — период функции $y = f(x)$, то 8 — также период данной функции;

г) если 5 — период функции $y = f(x)$, то 5 — период функции $y = -3f(2 - x) + 25$.

○**9.9.** Докажите:

а) если 3 — период функции $y = f(x)$, то 6 — период функции $y = 5f(0{,}5x + 2) - 1$;

б) если 9 — период функции $y = f(x)$, то 3 — период функции $y = 3 - 1{,}4f(3x - 7)$;

в) если 2 — период функции $y = f(x)$, то 3 — период функции $y = 100f\left(\frac{2x - 11}{3}\right) + 7$;

г) если 5 — период функции $y = f(x)$, то 1 — период функции $y = 81 - 3f(0{,}7 - 5x)$.

○**9.10.** Докажите, что если период функции $y = f(x)$ равен T, то

а) период функции $y = k \cdot f(x + a) + b \ \ (k \neq 0)$ равен T;

б) период функции $y = kf(px + a) + b \ \ (pk \neq 0)$ равен $\frac{T}{|p|}$.

○**9.11.** Пусть период функции $y = f(x)$ равен T_1, а период функции $y = g(x)$ равен T_2. Докажите, что период функции $y = h(x)$ равен T_3:

а) $T_1 = 2$, $T_2 = 7$, $h(x) = 5f(x) - 3g(x)$, $T_3 = 14$;

б) $T_1 = 15$, $T_2 = 10$, $h(x) = 8f(x) + 5g(x)$, $T_3 = 30$;

в) $T_1 = 3$, $T_2 = 13$, $h(x) = 0{,}2f(x - 3) - g(x + 11)$, $T_3 = 39$;

г) $T_1 = \frac{\sqrt{13}}{15}$, $T_2 = \frac{\sqrt{13}}{10}$, $h(x) = 5f(x) - 3g(x)$, $T_3 = \frac{\sqrt{13}}{5}$.

○**9.12.** Пусть для любого x из области определения функции $y = f(x)$ выполняется равенство $f(x - 0{,}1) = f(x + 0{,}1) = f(x)$. Докажите, что тогда для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x - 2) = f(x + 2) = f(x)$.

○**9.13.** Пусть для любого x из области определения функции $y = f(x)$ выполняются равенства $f(x - 3) = f(x + 3) = f(x)$ и $f(x - 5) = f(x + 5) = f(x)$. Докажите, что для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x - 2) = f(x + 2) = f(x)$.

Выясните, может ли функция быть периодической, если она обладает указанным свойством; если может, то приведите пример, если не может — объясните почему:

○**9.14.** а) Областью определения функции является отрезок или луч;

б) областью определения функции является объединение бесконечного множества отрезков, но не прямая;

в) функция определена на всей числовой прямой, кроме одной точки;

г) функция определена на всей числовой прямой, кроме бесконечного числа точек.

○**9.15.** а) Функция имеет шесть нулей;

б) функция не имеет нулей;

в) функция положительна при $x > 3$ и отрицательна при $x \leqslant 3$;

г) при $x > 3$ функция принимает положительные значения.

○**9.16.** а) Функция убывает на всей области своего определения;

б) функция имеет бесконечно много промежутков убывания;

в) функция имеет наименьшее значение, но не имеет наибольшего;

г) функция убывает на интервале $(3; 11)$.

В № **9.17—9.19** постройте график данной периодической функции $y = f(x)$ и укажите область её определения, область значений, промежутки монотонности, наибольшее и наименьшее значения, нули функции, промежутки знакопостоянства; исследуйте функцию на чётность-нечётность:

○**9.17.** а) Период функции равен 2 и $f(x) = 3x$ на промежутке $(-1; 1]$;

б) период функции равен 4 и $f(x) = 4 - x^2$ на отрезке $[-2; 2]$;

в) период функции равен 3 и $f(x) = 2 - x$ на промежутке $[0; 3)$;

г) период функции равен 1 и $f(x) = 2x^2 - 1$ на промежутке $(0; 1)$.

9.18. а) Период функции равен 2 и $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1; 1]$;

б) период функции равен 4 и $f(x) = 3\sqrt{x+2}$ на промежутке $[-2; 2)$;

в) период функции равен 3 и $f(x) = 3 - |2 - x|$ на промежутке $[0; 3)$;

г) период функции равен 1 и $f(x) = 3 - \sqrt{4 - 3x}$ на промежутке $(0; 1)$.

9.19. а) Период функции равен 2 и $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ на промежутке $(-1; 1]$;

б) период функции равен 4 и $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на промежутке $(-2; 2]$;

в) период функции равен 3 и $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ на промежутке $[0; 3)$;

г) период функции равен 5 и $f(x) = \dfrac{|x|}{|x| - 1}$ на промежутке $[-2; 3)$.

9.20. Наибольшее значение периодической функции с периодом 3 на отрезке $[-1; 2]$ равно 5, а наименьшее значение равно -2. Найдите, если это возможно:

а) наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $(-2; 11]$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $(-5; 8]$;

в) наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $(-2; 1]$;

г) наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $(-\infty; 1)$.

9.21. Пусть $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом 4 и $f(x) = 5x + 2$ на интервале $(0; 4)$. Решите:

а) уравнение $f(x) = 7$; б) неравенство $f(x) > 7$.

9.22. Пусть $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом 5 и $f(x) = x^2 + 2x$ на полуинтервале $(-3; 2]$. Решите:

а) уравнение $f(x) = 0$; в) уравнение $f(x) = 8$;

б) неравенство $f(x) > 3$; г) неравенство $f(x) < 0$.

9.23. Пусть $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом 4 и $f(x) = x^2 + 8x + 5$ на отрезке $[-6; -2]$. Решите:
а) уравнение $f(x) = -11$;
б) неравенство $f(x) \leqslant -11$;
в) уравнение $f(x) = -10$;
г) неравенство $f(x) > -10$.

9.24. а) Существует ли такая функция $y = f(x)$, что для любого x из области её определения выполняется равенство $f(x) = f(x + 2)$, а функция не является периодической? Если существует, приведите пример такой функции.
б) Существует ли такая функция $y = f(x)$, что для любого x из области её определения выполняется равенство $f(x) = f(x - 3)$, а функция не является периодической? Если существует, приведите пример такой функции.

9.25. а) Существует ли такая функция $y = f(x)$, что для любого x из области её определения выполняется равенство $f(2x) = f(x)$ и функция является периодической? Если существует, приведите пример такой функции.
б) Существует ли такая функция $y = f(x)$, что для любого x из области её определения выполняется неравенство $f(2x) > f(x)$ и функция является периодической? Если существует, приведите пример такой функции.

Прочитайте п. 4 в § 7 учебника. 69

9.26. Пусть $[x]$ — целая часть действительного числа x, а $\{x\}$ — дробная часть этого числа (напомним, что, согласно определению, $[x] \in \mathbf{Z}$, $[x] \leqslant x < [x] + 1$, $\{x\} = x - [x]$).
а) Найдите целую и дробную часть числа: 6; -3; 5,3; $-5{,}3$; $\frac{35}{53}$; $-\frac{35}{53}$; $\frac{535}{353}$; $-\frac{535}{353}$.
б) Найдите целую и дробную часть числа: $\sqrt{11}$; $\sqrt{11} - 2$; $3 - \sqrt{11}$; π; 0,(4); $-2{,}(3)$; $-7{,}(1)$.

9.27. а) Докажите, что для любого значения x выполняется равенство $[x + 1] = [x] + 1$.
б) Докажите, что для любого значения x выполняются равенства $\{x + 1\} = \{x\} = \{x - 1\}$.
в) Докажите, что функция $y = [x]$ не является периодической.
г) Докажите, что функция $y = \{x\}$ является периодической с периодом 1.

9.28. Докажите, что 1 — наименьший период функции $y = \{x\}$.

Постройте график функции и определите, является ли функция периодической:

9.29. а) $y = [x]$; в) $y = [2x]$;
б) $y = [x - 2,5]$; г) $y = [|x|]$.

9.30. а) $y = |[x]|$; в) $y = \{x\} + [x]$;
б) $y = x + [x]$; г) $y = [\{x\}]$.

9.31. а) $y = \{x\}$; в) $y = \{2x\}$;
б) $y = \{x - 2,5\}$; г) $y = \{|x|\}$.

9.32. а) $y = |\{x\}|$; в) $y = x - \{x\}$;
б) $y = x + \{x\}$; г) $y = \{[x]\}$.

Найдите основной период функции:

9.33. а) $y = \{x + 2\}$; $y = \{x - 3,7\}$; $y = 2\{x + 1,1\} - 14$; $y = 13 - 5\{x - 0,(3)\}$;
б) $y = \{2x\}$; $y = 3\{2x - 2,5\}$; $y = \{2x - 2,5\}$; $y = 4 - 0,5\{2x - 2,5\}$;
в) $y = \{0,5x\}$; $y = 3\{0,5x\}$; $y = 7\{0,5x\} + 6$; $y = 9 - 1,1\{0,5x\}$;
г) $y = \left\{\dfrac{3x}{4}\right\}$; $y = \left\{\dfrac{3x + 2}{4}\right\}$; $y = \left\{\dfrac{3x}{4} + 0,3\right\}$; $y = \left\{\dfrac{3x + 2}{4} + x\right\}$.

9.34. а) $y = \{x - 3,7\} + 3\{2x - 2,5\}$; $y = \left\{\dfrac{3x}{4} + 0,3\right\} + 5\{x - 11\}$;
б) $y = \{2x\} + \{3x - 2,5\}$; $y = 4 - \{12x - 2,5\} + \{18x\}$;
в) $y = \{0,3x\} + 5\{0,25x\}$; $y = 7\{0,15x\} + 1,1\{0,25x\}$;
г) $y = \left\{\dfrac{3x}{4}\right\} - \left\{\dfrac{5x + 2}{3}\right\}$; $y = \left\{6 - \dfrac{10x}{11}\right\} + 3 \cdot \left\{\dfrac{15x + 2}{22}\right\}$.

9.35. Постройте график функции:
а) $y = (\{x\})^2$; в) $y = \sqrt{\{x\}}$;
б) $y = \dfrac{1}{\{x\}}$; г) $y = \dfrac{\{x\} - 1}{1 - 2\{x\}}$.

9.36. Известно, что $y = f(x)$ — чётная, периодическая функция с основным периодом, равным 8, и что на отрезке $[0; 4]$ она задаётся формулой $y = \sqrt{x + 1}$.
а) Решите уравнение $f(x) = 0$;
б) решите уравнение $f(x) = 1$;
в) решите неравенство $f(x) \geqslant 0,97$;
г) решите систему неравенств $\begin{cases} f(x) \geqslant 2, \\ -4 \leqslant x \leqslant 8. \end{cases}$

9.37. Функция $y = f(x)$ является периодической с периодом $T = 8$. На отрезке $[-1; 7]$ она задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ x - 2, \text{ если } 1 < x < 5; \\ 8 - x, \text{ если } 5 \leqslant x \leqslant 7. \end{cases}$$

а) Вычислите: $f(40)$, $f(50)$, $f(-65)$.

б) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$ на отрезке $[-10; 10]$?

9.38. а) Функция $y = g(x)$ чётная и определена на всей числовой прямой, а $f(x) = g(g(x) + 3) + g(8 + 2g(x))$. Вычислите $f(2)$, если известно, что $g(2) = -5$.

б) Функция $y = g(x)$ чётная, периодическая с основным периодом $T = 2$ и определена на всей числовой прямой, а $f(x) = g(g(x) + 1) + g(5 + 3g(x))$. Вычислите $f(3)$, если известно, что $g(3) = -4$.

в) Функция $y = g(x)$ чётная и определена на всей числовой прямой, а $f(x) = g(g(x) + 2) + g(14 + 5g(x))$. Вычислите $f(1)$, если известно, что $g(1) = -3$.

г) Функция $y = g(x)$ чётная, определена на всей числовой прямой и периодическая с основным периодом, равным 5, а $f(x) = 2g(13 - 2x) + \dfrac{1}{g(x^2 - 28)}$. Вычислите $f(10)$, если известно, что $g(7) = -5$.

§ 10 ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

10.1. Дано равенство $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$. Выразите из этого равенства x через y, если:

а) $x \geqslant 0$; б) $x \leqslant 0$; в) $x \geqslant 2$; г) $x \leqslant -0{,}21$.

10.2. Дано равенство $\rho = \dfrac{st^3}{2 - s}$, связывающее три величины: ρ, s, t.

а) Выразите из этого равенства s через ρ и t;

б) выразите из этого равенства t через s и ρ.

10.3. Для функции, заданной графически, укажите область определения и выясните, имеет эта функция в своей области определения обратную функцию или нет; в случае положительного ответа постройте эскиз графика обратной функции:

а) рис. 34; б) рис. 35; в) рис. 36; г) рис. 37.

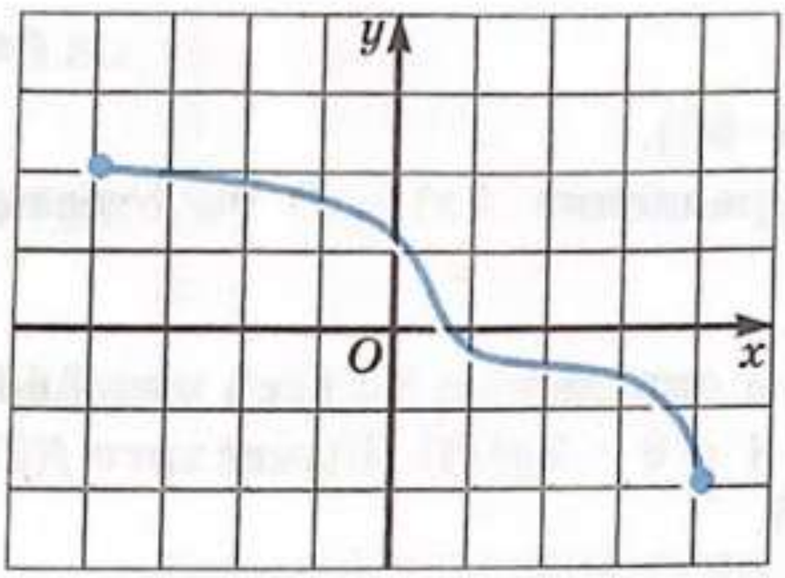


Рис. 34

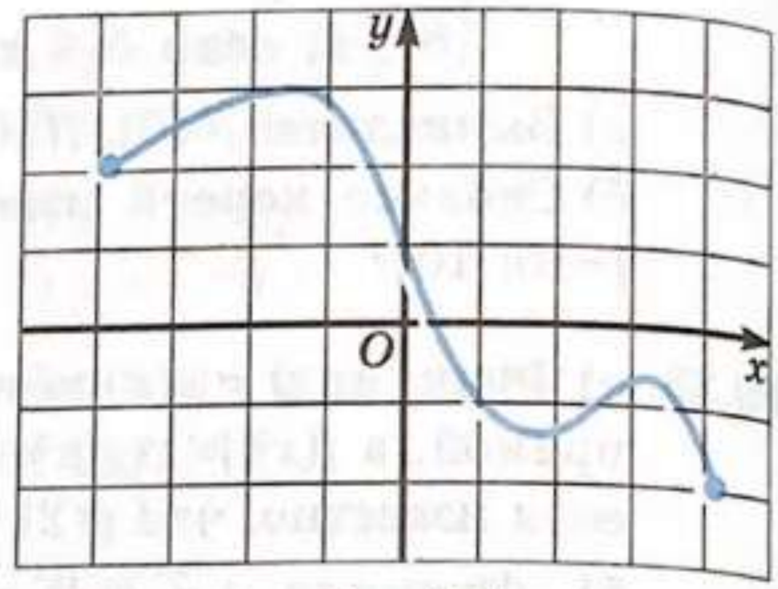


Рис. 35

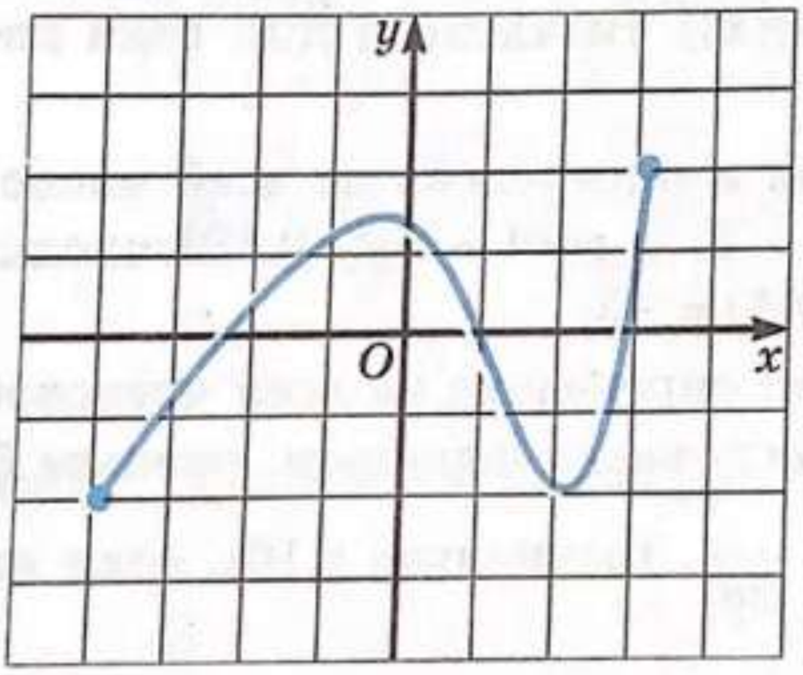


Рис. 36

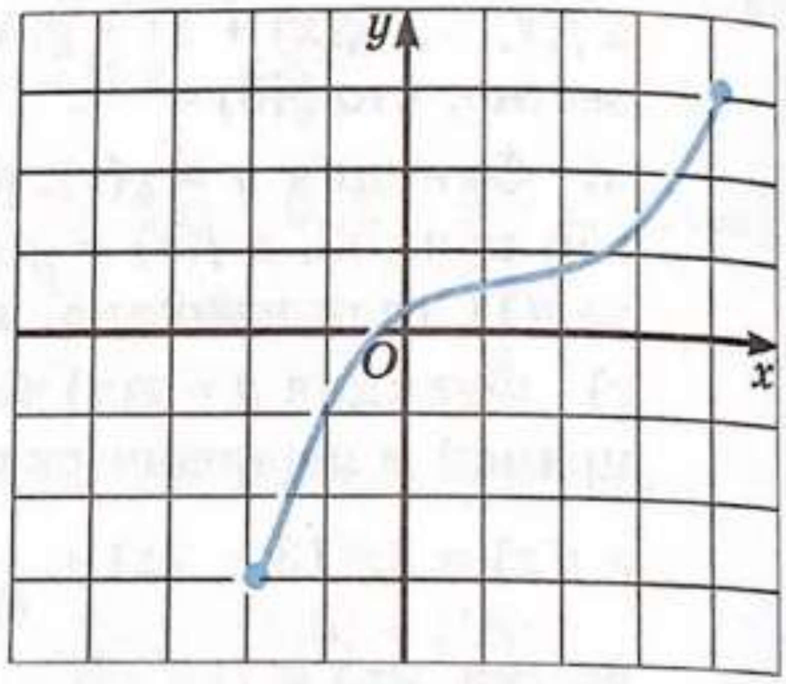


Рис. 37

10.4. Для функции, заданной табличным способом, укажите её область определения и выясните, имеет эта функция в своей области определения обратную функцию или нет; в случае положительного ответа постройте график обратной функции:

а)

x	1	2	5	7
y	3	4	7	3

б)

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	5	7
y	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	0,(6)	1,(4)

в)

x	1	2	3	7
y	5	8	9	1

г)

x	-1	1	2	5
y	4	1,(7)	$1\frac{2}{3}$	1

10.5. Найдите область определения и множество значений функции $y = g(x)$, обратной для функции $y = f(x)$, если:

а) $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = (3; +\infty)$;

б) $D(f) = (2; 3) \cup [5; 6)$, $E(f) = (3; 4) \cup (7; +\infty)$;

в) $D(f) = [-5; 6)$, $E(f) = (-\infty; 11]$;

г) $D(f) = E(f) = \{-3; 4; 7\} \cup (10; +\infty)$.

10.6. Найдите множество значений каждой из взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, если указаны их области определения:

а) $D(f) = \boldsymbol{R}$, $D(g) = [-2; +\infty)$;

б) $D(f) = [-3; 4]$, $D(g) = [4; 11]$;

в) $D(f) = (0; +\infty)$, $D(g) = (-\infty; 7)$;

г) $D(f) = \{-1; 2; 4\}$, $D(g) = \{-2; 78; 123\}$.

○**10.7.** Являются ли функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ взаимно обратными, если:

а) $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$;

б) $f(x) = \frac{3}{5} - 6x$, $g(x) = 0{,}1 - \frac{1}{6}x$;

в) $f(x) = \frac{1}{7}x - 3$, $g(x) = 7x + 3$;

г) $f(x) = \frac{7}{3}x + \frac{3}{7}$, $g(x) = \frac{3}{7}x + \frac{7}{3}$?

Найдите функцию, обратную данной. Постройте на одном чертеже графики этих взаимно обратных функций:

10.8. а) $y = 3x$; в) $y = x - 7$;

б) $y = 5x + 2$; г) $y = \frac{1}{3}x - 4$.

○**10.9.** а) $y = \frac{3}{x - 1}$; в) $y = \frac{2}{x + 4}$;

б) $y = \frac{x + 7}{2x - 5}$; г) $y = \frac{2x - 1}{x + 3}$.

○**10.10.** Является ли данная функция обратной по отношению к самой себе:

а) $y = x$; в) $y = -x$;

б) $y = 3x$; г) $y = -x + 1$?

○**10.11.** Совпадает ли данная функция со своей обратной:

а) $y = \frac{7}{x}$;

в) $y = -\frac{8}{x}$;

б) $y = \frac{7}{x-2}$;

г) $y = 5 - \frac{8}{x}$?

○**10.12.** Задайте функцию, обратную данной; постройте её график:

а) $y = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 3x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -5x - 3, \text{ если } x \leqslant -1, \\ -1 - 3x, \text{ если } x > -1; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} -x, \text{ если } x < 0, \\ 3x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} 2x + 1, \text{ если } x \leqslant 2, \\ \frac{1}{2}x + 4, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$

○**10.13.** Задайте функцию, обратную данной; постройте графики заданной и обратной функций:

а) $y = \sqrt{x+3}$;

в) $y = \sqrt{2x-1}$;

б) $y = -\sqrt{2-x}$;

г) $y = -\sqrt{3-5x}$.

○**10.14.** Может ли функция иметь обратную, если она:

а) линейная;

в) дробно-линейная;

б) квадратичная;

г) вида $y = \sqrt{x+a}$?

○**10.15.** Обязательно ли функция имеет обратную, если она:

а) линейная;

в) вида $y = \sqrt{x+a}$;

б) дробно-линейная;

г) вида $y = x^3 + a$?

○**10.16.** Может ли функция иметь обратную, если она:

а) чётная;

в) периодическая;

б) нечётная;

г) непериодическая?

○**10.17.** Может ли функция иметь обратную, если она:

а) возрастающая;

в) имеет три нуля;

б) убывающая;

г) не имеет нулей?

10.18. Рассмотрите график функции, представленный на рисунке, и укажите несколько числовых промежутков, на которых данная функция имеет обратную, и несколько, — на которых она не имеет обратной:

а) рис. 38; б) рис. 39; в) рис. 40; г) рис. 41.

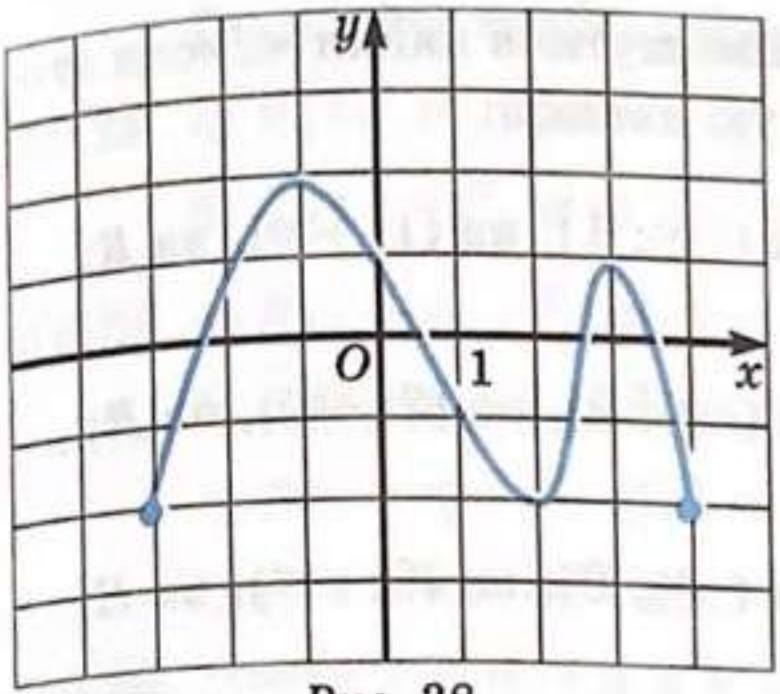


Рис. 38

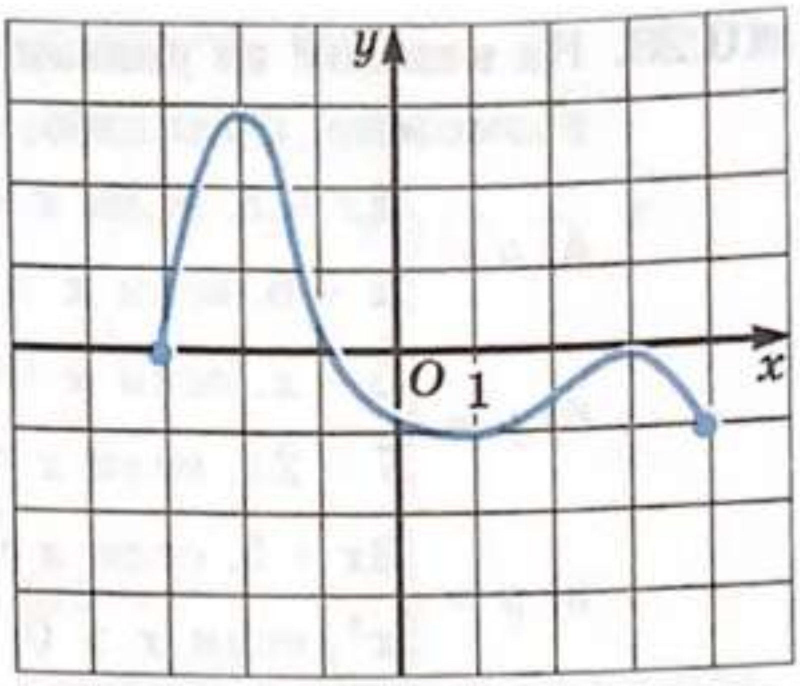


Рис. 39

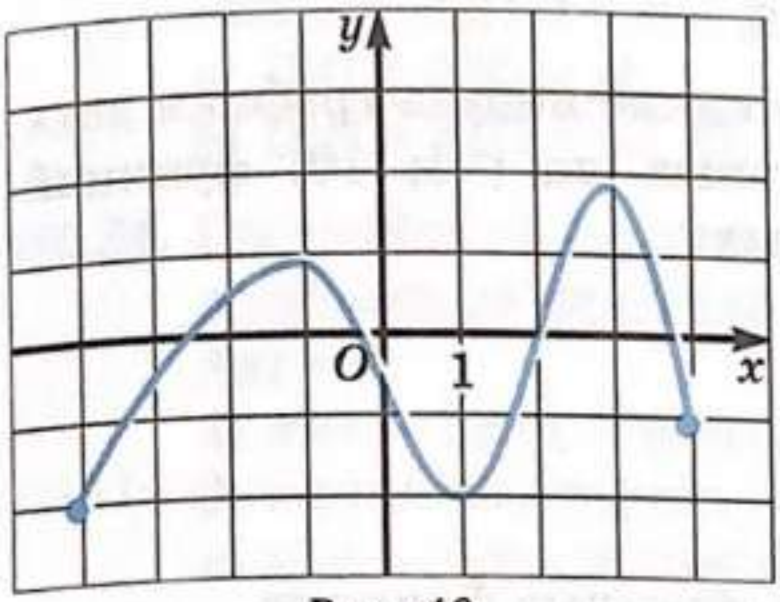


Рис. 40

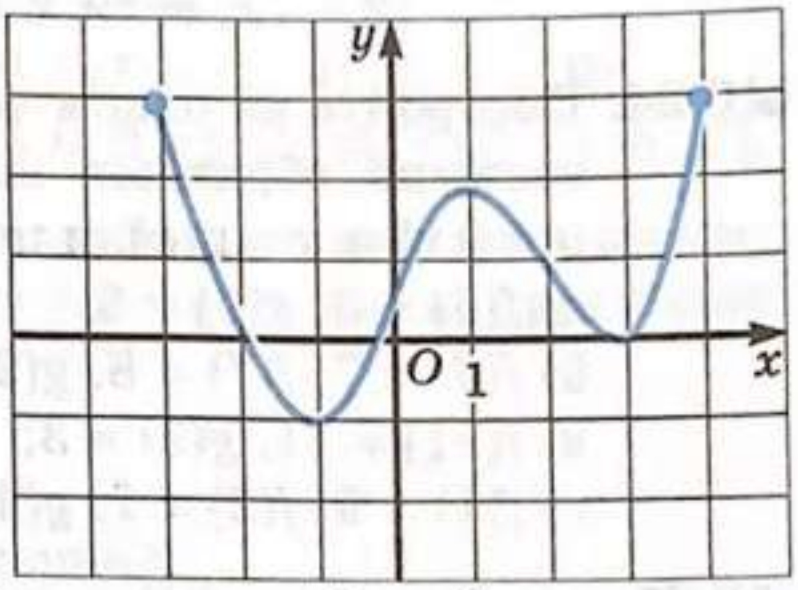


Рис. 41

Рассмотрите данную функцию на каждом из указанных промежутков; если она на этом промежутке имеет обратную функцию, то задайте обратную функцию аналитически, укажите её область определения и область значений, постройте её график:

○**10.19.** $y = x^2$:

а) на $\boldsymbol{R}$; в) на $(-1; 5]$;

б) на $[1; +\infty)$; г) на $(-\infty; 0]$.

○**10.20.** $y = x^2 - 2$:

а) на $\boldsymbol{R}$; в) на $(-1; 5]$;

б) на $[1; 2)$; г) на $[-2; 0]$.

○**10.21.** $y = (x + 3)^2 - 2$:

а) на $\boldsymbol{R}$; в) на $(-\infty; -3]$;

б) на $[-3; +\infty)$; г) на $[-4; 4]$.

○**10.22.** $y = x^2 - 4x + 18$:

а) на $\boldsymbol{R}$; в) на $(-\infty; 0]$;

б) на $[2; +\infty)$; г) на $(-\infty; 3)$.

10.23. На каждом из указанных промежутков найдите, если это возможно, функцию, обратную данной:

а) $y = \begin{cases} 2x - 5, \text{ если } x \leqslant 1, \\ x - 6, \text{ если } x > 1 \end{cases}$ на $(-\infty; 1]$, на $(1; +\infty)$, на R;

б) $y = \begin{cases} 5 - x, \text{ если } x \leqslant 2, \\ 7 - 2x, \text{ если } x > 2 \end{cases}$ на $(-\infty; 2]$, на $(2; +\infty)$, на R;

в) $y = \begin{cases} 3x + 5, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x^2, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ на $(-\infty; 0]$, на $(0; +\infty)$, на R;

г) $y = \begin{cases} 3 - x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 2 - 7x, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ на $(-\infty; 0]$, на $(0; +\infty)$, на R.

10.24. Постройте на одном чертеже какие-нибудь графики двух взаимно обратных непрерывных на $(-5; 10)$ функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, для которых:

а) $f(3) = 3$, $g(5) = 5$;
б) $f(3) = 7$, $f(7) = 8$, $g(9) = 9$;
в) $f(-1) = -1$, $g(3) = 3$;
г) $f(1) = 9$, $f(2) = 7$, $g(4) = 4$.

10.25. $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — взаимно обратные функции.

а) $f(3) = 5$ и $g(7) = 1$. Решите уравнения $f(x) = 7$ и $g(x) = 3$.
б) $f(4) = 4$ и $g(25) = 9$. Решите уравнения $f(x^2) = 25$ и $g(x^2) = 4$.
в) $f(15) = -3$ и $g(-7) = 1$. Решите уравнения $f(t) = -7$ и $g(t) = 15$.
г) $f(7) = 5$ и $g(7) = 1$. Решите уравнения $f(3x) = 7$ и $g(5 - x) = 7$.

Постройте график функции $y = f(g(x))$, если:

10.26. а) $f(x) = 4x$, $g(x) = 0{,}25x$;
б) $f(x) = x - 3$, $g(x) = x + 3$;
в) $f(x) = -2x$, $g(x) = -0{,}5x$;
г) $f(x) = -5x + 5$, $g(x) = -0{,}2x - 1$.

10.27. а) $f(x) = \dfrac{3}{x}$, $g(x) = \dfrac{3}{x}$;

б) $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{3-x}{x}$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$, $g(x) = \dfrac{1}{2x}$;

г) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{1-x}$.

Постройте график функции $y = f(g(x))$, если:

○**10.28.** а) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$; в) $f(x) = x^2$, $g(x) = -\sqrt{x}$;
б) $f(x) = -x^2$, $g(x) = \sqrt{-x}$; г) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -\sqrt{-x}$.

○**10.29.** а) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$;
б) $f(x) = 3 - 0{,}5x^2$, $g(x) = \sqrt{6 - 2x}$;
в) $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \sqrt{x + 2}$;
г) $f(x) = 8 - 2x^2$, $g(x) = -\sqrt{4 - 0{,}5x}$.

●**10.30.** Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — взаимно обратные функции. Постройте на двух различных чертежах графики функций $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$, если:
а) $D(f) = E(f) = \mathbf{R}$; в) $D(f) = [1; 3]$; $E(f) = \mathbf{R}$;
б) $D(f) = E(f) = (0; 3]$; г) $D(f) = [-2; 3]$; $E(f) = [-3; 2]$.

●**10.31.** Постройте на одном чертеже графики таких двух взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, чтобы уравнение $f(x) = x$:
а) имело один корень;
б) имело три корня;
в) имело бесконечно много корней;
г) не имело корней.

●**10.32.** Постройте на одном чертеже графики таких двух взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, чтобы уравнение $f(x) = g(x)$:
а) имело один корень;
б) имело три корня;
в) имело бесконечно много корней;
г) не имело корней.

●**10.33.** Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — некоторые взаимно обратные функции. Являются ли равносильными следующие уравнения:
а) $f(x) = x$ и $g(x) = x$; б) $f(g(x)) = x$ и $g(f(x)) = x$?

Постройте график функции и определите, существует ли для неё обратная функция. Если да, то на том же чертеже постройте график обратной функции и задайте её аналитически:

●**10.34.** а) $y = 3x + |x|$; в) $y = 2|x| - 5x$;
б) $y = x + 2|x|$; г) $y = 2x - 5|x|$.

●**10.35.** а) $y = x|x|$; в) $y = 2 - x|x|$;
б) $y = x^2 + 2|x|$; г) $y = x|x - 2|$.

3 ГЛАВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 11 ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Горизонтальный диаметр CA и вертикальный диаметр DB разбивают единичную окружность на четыре четверти: AB — первая, BC — вторая, CD — третья, DA — четвёртая (рис. 42).

94 Прочитайте п. 1 в § 11 учебника.

11.1. Вторая четверть разделена на две равные части точкой M, а третья — на три равные части точками K и P. Найдите длину дуги:

а) AM; б) BK; в) PM; г) PK.

11.2. Первая четверть разделена на две равные части точкой M, а четвёртая — на три равные части точками K и P. Найдите длину дуги:

а) DM; б) BK; в) PM; г) PC.

11.3. Третья четверть разделена точкой M в отношении $2:3$, первая — точкой P в отношении $1:5$. Найдите длину дуги:

а) CM; б) AP; в) PM; г) MP.

○11.4. Можно ли найти на единичной окружности точку E с указанной ниже длиной дуги AE? Если да, то укажите четверть, в которой расположена точка E:

а) $AE = 2$; в) $AE = 6{,}3$;

б) $AE = \sqrt{8\pi}$; г) $AE = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

11.5. а) К радиусам OA и OC проведены серединные перпендикуляры соответственно MN и PQ (рис. 42). Чему равен центральный угол AOM? Найдите длину хорды MN. Найдите длину дуги QN. Докажите, что точки A, M, P, C, Q, N делят окружность на шесть равных частей.

б) К радиусам OB и OD проведены серединные перпендикуляры LK и TS соответственно (рис. 43). Чему равен центральный угол KOB? Найдите длину хорды KL. Найдите длину дуги TL. Докажите, что точки K, B, L, T, D, S делят окружность на шесть равных частей.

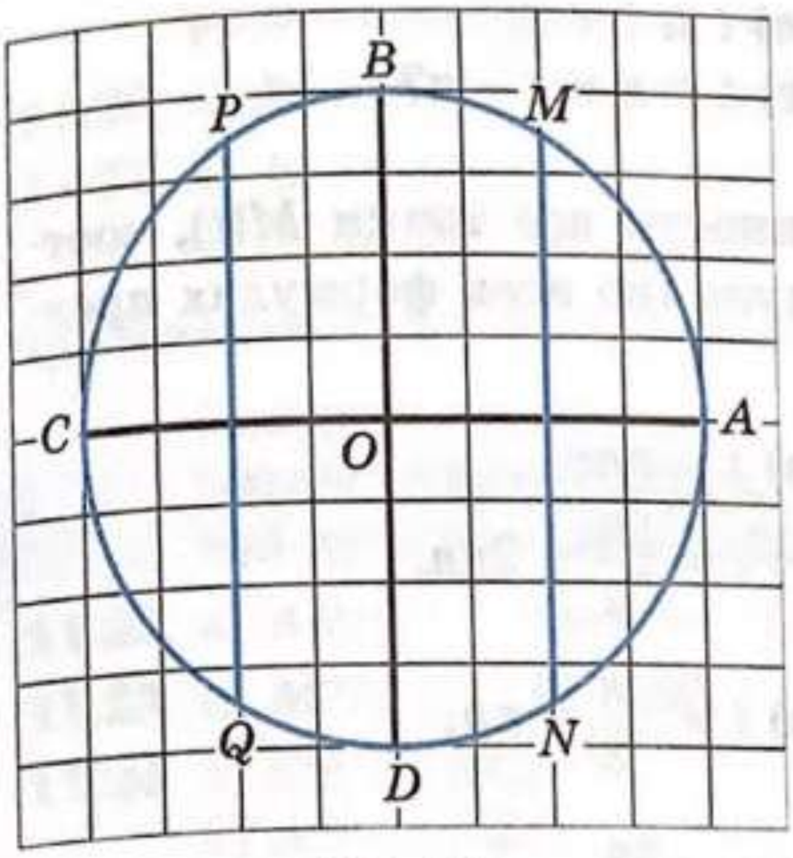


Рис. 42

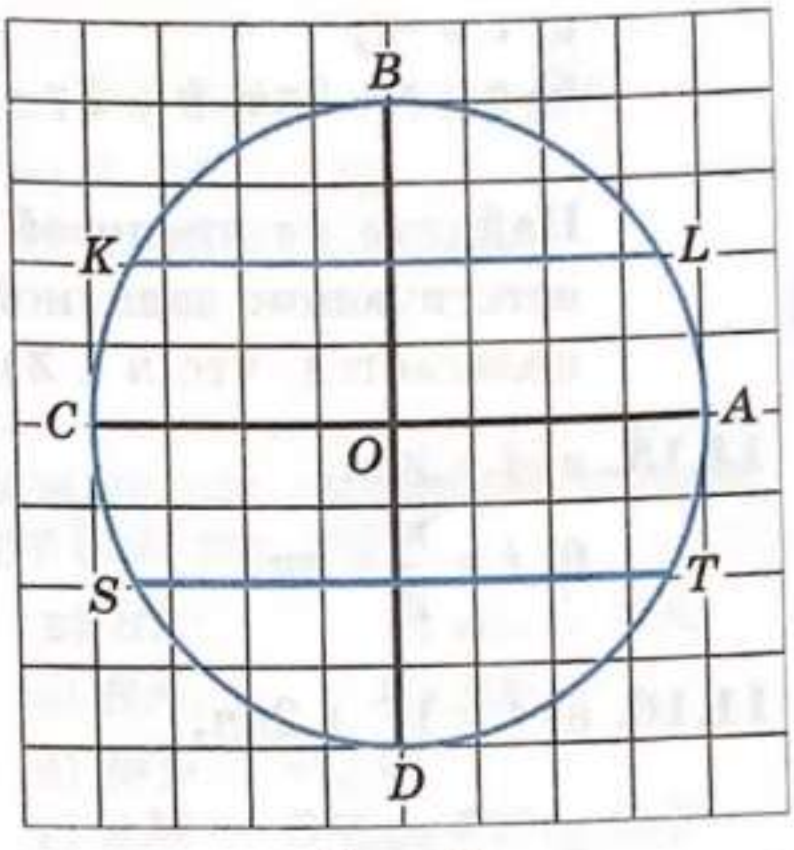


Рис. 43

Прочитайте п. 2 в § 11 учебника. 96

Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

11.6. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $-\pi$; в) 4π; г) $-\frac{3\pi}{2}$.

11.7. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{7\pi}{4}$; г) $-\frac{3\pi}{4}$.

11.8. а) $\frac{10\pi}{3}$; б) $-\frac{17\pi}{4}$; в) $\frac{31\pi}{6}$; г) $-\frac{19\pi}{3}$.

11.9. а) $\frac{\pi}{8}$; б) $-\frac{\pi}{12}$; в) $\frac{7\pi}{12}$; г) $-\frac{11\pi}{8}$.

11.10. а) 1; б) –2; в) 3,5; г) –7.

Какой четверти числовой окружности принадлежит точка, соответствующая заданному числу?

о**11.11.** а) 6; б) –4,5; в) 3,3; г) –5.

о**11.12.** а) 10; б) –17; в) 31; г) –95.

о**11.13.** Укажите однозначное натуральное число, которому на числовой окружности (рис. 42) соответствует точка, наиболее близкая:

а) к точке A;
б) к точке B;
в) к точке C;
г) к точке D.

11.14. Как расположены на числовой прямой и на числовой окружности точки, соответствующие числам:

а) t и $-t$;
б) t и $t + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;
в) t и $t + \pi$;
г) $t + \pi$ и $t - \pi$?

Найдите на числовой окружности все точки $M(t)$, соответствующие заданной формуле (во всех формулах предполагается, что $n \in \mathbf{Z}$):

11.15. а) $t = 2\pi n$;
б) $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$;
в) $t = \pi n$;
г) $t = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

11.16. а) $t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$;
б) $t = \frac{2\pi n}{3}$;
в) $t = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$;
г) $t = \frac{\pi n}{3}$.

11.17. а) $t = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$;
б) $t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$;
в) $t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$;
г) $t = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$.

Числовая окружность разделена точками на восемь равных частей (рис. 44). Составьте формулу для всех чисел, которым соответствуют точки:

○**11.18.** а) A и C; б) B и D; в) M и P; г) N и Q.

○**11.19.** а) M, N, P, Q; б) A, M, B, N, C, P, D, Q.

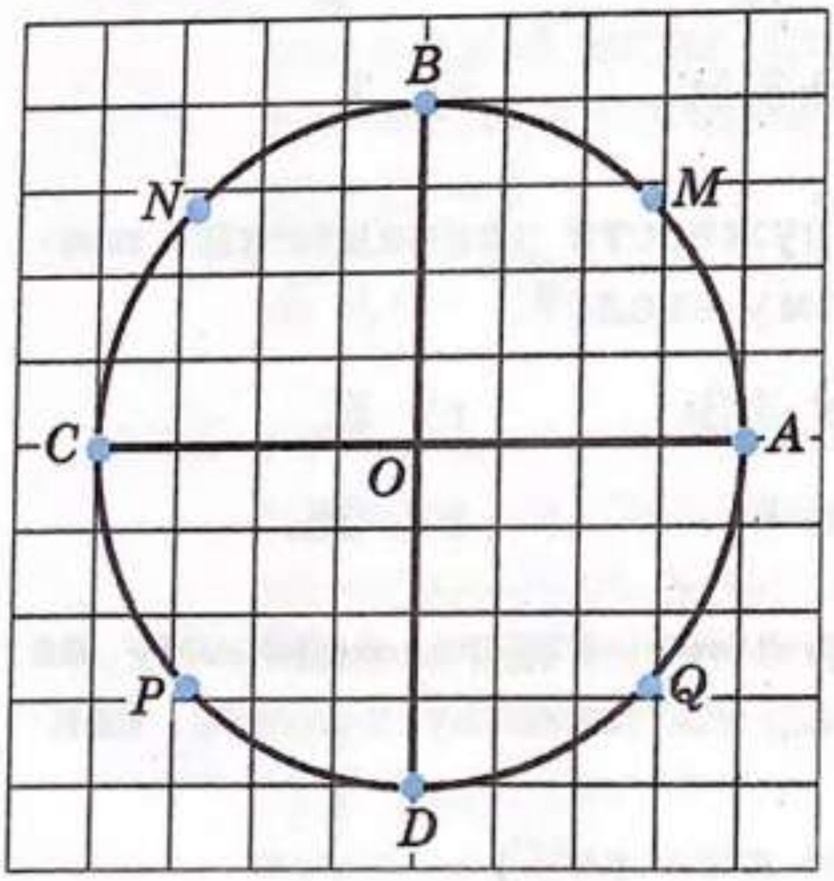


Рис. 44

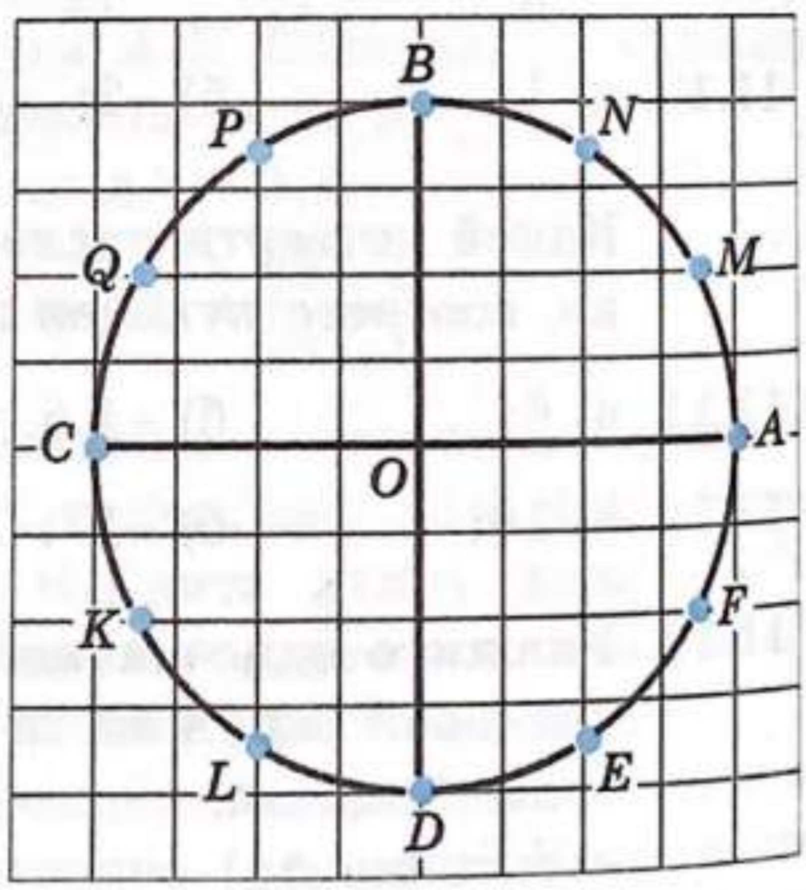


Рис. 45

Числовая окружность разделена точками на 12 равных частей (рис. 45). Составьте формулу для всех чисел, которым соответствуют точки:

11.20. а) M и K; б) P и E; в) P и L; г) M и F.

11.21. а) A, P, L; б) B, K, F; в) F, M, Q, K; г) A, N, P, C, L, E.

Прочитайте п. 3 в § 11 учебника.

101

Найдите все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие указанной открытой дуге или объединению дуг (см. рис. 44):

11.22. а) AB; б) $AB \cup CD$; в) BD; г) $BC \cup DA$.

11.23. а) MN; б) NM; в) BP; г) PB.

11.24. а) $QA \cup NC$; б) $AN \cup CQ$; в) $MN \cup PQ$; г) $AM \cup BN \cup CP \cup DQ$.

Найдите все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие указанной дуге (см. рис. 45):

11.25. а) MP; б) AQ; в) BL; г) DF.

11.26. а) EN; б) QM; в) KA; г) KF.

Выделите на числовой окружности дугу, точки которой удовлетворяют заданному неравенству (во всех формулах предполагается, что $n \in \mathbf{Z}$):

11.27. а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$;

б) $2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; г) $\pi + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$.

11.28. а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

б) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$;

в) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$;

г) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$.

Найдите на числовой окружности все точки $M(t)$, соответствующие заданным формулам; составьте общую формулу для всех чисел, которым соответствуют найденные точки:

11.29. а) $t = 2\pi n$, $t = \pi + 2\pi n$; в) $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$;

б) $t = \pi n$, $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$; г) $t = \pi n$, $t = \frac{\pi n}{2}$.

○**11.30.** а) $t = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ t = \frac{\pi n}{3}$;

б) $t = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$;

в) $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ t = 2\pi n$;

г) $t = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$.

●**11.31.** а) $t = -\frac{\pi}{6} + \pi(2n + 1),\ t = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$;

б) $t = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,\ t = \pi n$;

в) $t = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ t = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$;

г) $t = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ t = \pi n$.

○**11.32.** На числовой прямой и числовой окружности отметьте все точки $M(t)$, заданные формулой и принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

а) $t = (-1)^n\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{3}$;

б) $t = \pm\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$;

в) $t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$;

г) $t = \pm\frac{3\pi}{7} + \frac{\pi n}{3}$.

○**11.33.** На числовой прямой и числовой окружности отметьте все точки $M(t)$, заданные формулой и принадлежащие отрезку $[-2; 4]$:

а) $t = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$;

б) $t = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$;

в) $t = \pm\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$;

г) $t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{4}$.

○**11.34.** На числовой прямой и числовой окружности отметьте все точки $M(t)$, заданные формулой и принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$:

а) $t = n$;

б) $t = \frac{1}{2} + 2n$;

в) $t = 2n + 1$;

г) $t = \frac{1}{3} + \frac{3n}{2}$.

§ 12 ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Всюду в этом параграфе предполагается, что центр числовой окружности совпадает с началом координат плоскости xOy.

Прочитайте п. 1 в § 12 учебника.

105

Найдите декартовы координаты заданной точки:

12.1. а) $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$; б) $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$; в) $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$; г) $M\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

12.2. а) $M(-3\pi)$; б) $M\left(\frac{11\pi}{4}\right)$; в) $M\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; г) $M\left(\frac{31\pi}{2}\right)$.

12.3. а) $M\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$; б) $M(117\pi)$; в) $M\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; г) $M(126\pi)$.

12.4. Найдите наименьшее положительное и наибольшее отрицательное числа, которым на числовой окружности соответствует заданная точка:

а) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; в) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

б) $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

12.5. Каким числам из заданного отрезка соответствует точка $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ числовой окружности:

а) $[-4\pi; \pi]$; в) $[0; 5\pi]$;

б) $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$?

○**12.6.** На отрезке $\left[-\frac{3\pi}{8}; \frac{17\pi}{6}\right]$ укажите числа, которым на числовой окружности соответствует заданная точка:

а) $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$;

б) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

12.7. Имеется ли на числовой окружности точка, абсцисса или ордината которой равна:

а) 0,7; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\sqrt{17} - \sqrt{26}$?

Укажите знаки абсциссы и ординаты заданной точки числовой окружности:

○**12.8.** а) $E(2)$; б) $K(-4)$; в) $P(3,2)$; г) $M(-4,8)$.

○**12.9.** а) $E(12)$; б) $K(-15)$; в) $P(49)$; г) $M(100)$.

●**12.10.** Что больше, абсцисса или ордината заданной точки числовой окружности:

а) $E(1)$; б) $K(-2,5)$; в) $P(7)$; г) $M(-4)$?

●**12.11.** Что больше, модуль абсциссы или модуль ординаты заданной точки числовой окружности:

а) $F(2,8)$; б) $L(-4,2)$; в) $K(-0,5)$; г) $M(4,5)$?

12.12. Как связаны между собой абсциссы точек числовой окружности:

а) t и $-t$; в) t и $\pi - t$;
б) t и $t + \pi$; г) t и $2\pi - t$?

12.13. Как связаны между собой ординаты точек числовой окружности:

а) t и $-t$; в) t и $\pi - t$;
б) t и $t + \pi$; г) t и $2\pi - t$?

109 **Прочитайте п. 2 в § 12 учебника.**

На числовой окружности укажите все точки, координаты которых удовлетворяют данным условиям, и составьте формулы для всех чисел, которым соответствуют эти точки:

12.14. а) $x = 0$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $x = 1$.

12.15. а) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $x = -1$.

12.16. а) $y = 0$; б) $y = \frac{1}{2}$; в) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $y = 1$.

12.17. а) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $y = -1$.

12.18. а) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y < 0$; в) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y < 0$;

б) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y > 0$; г) $x = -\frac{1}{2}$, $y > 0$.

12.19. а) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x > 0$;
в) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x < 0$;
б) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x < 0$;
г) $y = -\frac{1}{2}$, $x > 0$.

12.20. а) $y = x$;
в) $x + y = 0$;
б) $y = -x\sqrt{3}$;
г) $\frac{x}{y} = \sqrt{3}$.

Прочитайте п. 3 в § 12 учебника.

110

Найдите на числовой окружности точки, координаты которых удовлетворяют заданному неравенству или системе неравенств, и запишите (с помощью двойного неравенства), каким числам t они соответствуют:

12.21. а) $x > 0$; б) $x < \frac{1}{2}$; в) $x > \frac{1}{2}$; г) $x < 0$.

12.22. а) $x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $x > -\frac{1}{2}$.

12.23. а) $y > 0$; б) $y < \frac{1}{2}$; в) $y > \frac{1}{2}$; г) $y < 0$.

12.24. а) $y > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $y < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $y < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $y > -\frac{1}{2}$.

12.25. а) $\begin{cases} x > 0, \\ y < 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y > \frac{1}{2}; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x < 0, \\ y > -\frac{1}{2}; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ y < \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

12.26. а) $x - y > 0$; б) $xy > 0$; в) $x + y < 0$; г) $xy < 0$.

12.27. а) $x + y \leqslant 1$; б) $x - y > -1$; в) $x + y > -1$; г) $x - y \leqslant 1$.

12.28. а) $2x^2 - x < 0$;
в) $y + 2y^2 > 0$;
б) $(2x - 1)(y - 3) > 0$;
г) $\left(2y - \sqrt{2}\right)(x + 2) \leqslant 0$.

12.29. а) $4x^2 - 1 \leqslant 0$;
в) $3 - 4y^2 > 0$;
б) $1 - 2y^2 < 0$;
г) $2x^2 - 1 \geqslant 0$.

§ 13 СИНУС И КОСИНУС. ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС

113 **Прочитайте пп. 1—3 в § 13 учебника.**

Вычислите $\sin t$ и $\cos t$, если:

13.1. а) $t = 0$; б) $t = \frac{\pi}{2}$; в) $t = \frac{3\pi}{2}$; г) $t = \pi$.

13.2. а) $t = \frac{5\pi}{6}$; б) $t = \frac{5\pi}{4}$; в) $t = \frac{7\pi}{6}$; г) $t = \frac{9\pi}{4}$.

13.3. а) $t = \frac{13\pi}{6}$; б) $t = -\frac{8\pi}{3}$; в) $t = \frac{23\pi}{6}$; г) $t = -\frac{11\pi}{3}$.

Вычислите:

13.4. а) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{2}$;

в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;

г) $\sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{2}$.

13.5. а) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 \cdot \sin\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{2} \cdot \sin\frac{5\pi}{8} \cdot \cos\frac{3\pi}{2}$.

13.6. Найдите значение выражения:

а) $\cos 2t$, если $t = \frac{\pi}{2}$;

б) $\sin\frac{t}{2}$, если $t = -\frac{\pi}{3}$;

в) $\sin^2 t - \cos^2 t$, если $t = \frac{\pi}{4}$;

г) $\sin^2 t + \cos^2 t$, если $t = \frac{\pi}{6}$.

Вычислите:

13.7. а) $\sin^2(1{,}5 + 32\pi) + \cos^2 1{,}5 + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos^2\left(\frac{\pi}{8} + 4\pi\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - 44\pi\right)$.

13.8. а) $\cos 1 + \cos(1 + \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\sin 2 + \sin(2 + \pi) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\frac{\pi}{12}$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения:

13.9. а) $2\sin t$;
б) $3 + 4\cos t$;
в) $-3\cos t$;
г) $3 - 5\sin t$.

○**13.10.** а) $\frac{15}{2|\sin t| + 3}$;
б) $\sqrt{7\cos^2 t + 9}$;
в) $\frac{1}{3\sin^2 t + 4\cos^2 t}$;
г) $\frac{5\sin^2 t + 5\cos^2 t}{3|\cos t| + 2}$.

Определите знак числа:

13.11. а) $\sin\frac{4\pi}{7}$; б) $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$; в) $\sin\frac{9\pi}{8}$; г) $\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$.

○**13.12.** а) $\sin(-2)$; б) $\cos 3$; в) $\sin 5$; г) $\cos(-6)$.

○**13.13.** а) $\sin 10$; б) $\cos(-12)$; в) $\sin(-15)$; г) $\cos 8$.

○**13.14.** а) $\sin 1 \cdot \cos 2$;
б) $\sin\frac{\pi}{7} \cdot \cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right)$;
в) $\cos 2 \cdot \sin(-3)$;
г) $\cos\left(-\frac{14\pi}{9}\right) \cdot \sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$.

Решите уравнение:

13.15. а) $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
б) $\sin t = -\frac{1}{2}$;
в) $\cos t = -\frac{1}{2}$;
г) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

13.16. а) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $\cos t = \sqrt{3}$;
в) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
г) $\sin t = -\frac{\pi}{3}$.

13.17. а) $10\sin t = \sqrt{75}$;
б) $\sqrt{8}\sin t + 2 = 0$;
в) $8\cos t - \sqrt{32} = 0$;
г) $8\cos t = -\sqrt{48}$.

13.18. а) $\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} - \sqrt{2}\sin t = 0$;

б) $\sqrt{\frac{4}{3}}\cos t = \cos^2 1 + \sin^2 1$.

○**13.19.** Решите уравнение:

а) $|\sin t| = 1$;

б) $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2}$;

в) $|\cos t| = 1$;

г) $\sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

○**13.20.** Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{\sin 10{,}2\pi}$;

б) $\sqrt{\cos 1{,}3\pi}$;

в) $\sqrt{\sin(-3{,}4\pi)}$;

г) $\sqrt{\cos(-6{,}9\pi)}$?

122 Прочитайте пп. 4—5 в § 13 учебника.

Вычислите:

13.21. а) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$;

г) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$.

13.22. а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

13.23. а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

б) $2\sin\pi + 3\cos\pi + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;

в) $2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

г) $2\operatorname{tg}0 + 8\cos\frac{3\pi}{2} - 6\sin\frac{\pi}{3}$.

13.24. а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$;

б) $3\operatorname{tg}2{,}3\cdot\operatorname{ctg}2{,}3$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$;

г) $7\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$.

13.25. а) $\operatorname{tg}2{,}5\cdot\operatorname{ctg}2{,}5 + \cos^2\pi - \sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}$;

б) $\sin^2\frac{3\pi}{7} - 2\operatorname{tg}1\cdot\operatorname{ctg}1 + \cos^2\left(-\frac{3\pi}{7}\right) + \sin^2\frac{5\pi}{2}$.

○**13.26.** Докажите равенство:

а) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4} - \cos\pi - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{3\pi}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

б) $\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{4} + \sin\dfrac{3\pi}{2}\operatorname{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)}{2\cos\dfrac{11\pi}{6} + 2\sin^2\dfrac{11\pi}{4}} = \sqrt{3} - 1.$

13.27. Упростите выражение:

а) $\sin t \cdot \cos t \cdot \operatorname{tg} t$;

б) $\sin t \cdot \cos t \cdot \operatorname{ctg} t - 1$;

в) $\sin^2 t - \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t$;

г) $\dfrac{1 - \cos^2 t}{1 - \sin^2 t}$.

Докажите тождество:

13.28. а) $1 + \operatorname{tg}^2 t = \cos^{-2} t$;

б) $1 + \operatorname{ctg}^2 t = \sin^{-2} t$;

в) $\sin^2 t\,(1 + \operatorname{ctg}^2 t) = 1$;

г) $\cos^2 t\,(1 + \operatorname{tg}^2 t) = 1$.

13.29. а) $\operatorname{tg}(\pi - t) = -\operatorname{tg} t$;

б) $\operatorname{tg}(2\pi + t) = \operatorname{tg} t$;

в) $\operatorname{ctg}(\pi - t) = -\operatorname{ctg} t$;

г) $\operatorname{ctg}(2\pi + t) = \operatorname{ctg} t$.

Определите знак выражения:

13.30. а) $\cos\dfrac{5\pi}{9} - \operatorname{tg}\dfrac{25\pi}{18}$;

б) $\operatorname{tg} 1 - \cos 2$;

в) $\sin\dfrac{7\pi}{10} - \operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{5}$;

г) $\sin 2 - \operatorname{ctg} 5{,}5$.

13.31. а) $\sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 4$;

б) $\sin(-5) \cdot \operatorname{ctg}(-6) \cdot \operatorname{tg}(-7) \cdot \operatorname{ctg}(-8)$.

13.32. Вычислите:

а) $\sin 4 + |\sin 4| + 2\cos 13 - 2|\cos 13|$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg} 11 + |\operatorname{tg} 11|}{|\operatorname{ctg} 12| - \operatorname{ctg} 12}$.

Решите неравенство (относительно переменной x):

13.33. а) $\cos 2 \cdot (2x - 1) < 0$;

б) $\cos 3 \cdot \cos 5 \cdot (x^2 - 4) < 0$.

13.34. а) $(\cos t - 5)(3x - 1) \geqslant 0$;

б) $(2 + \sin t)(9 - x^2) \geqslant 0$.

13.35. а) $\operatorname{ctg} 5 \cdot (x - 1) \geqslant 0$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg} 7 \cdot \cos 1}{\sin 1}(2x^2 - 72) < 0$;

в) $(\operatorname{tg} 2 \cdot \sin 5) \cdot (7 - 5x) \leqslant 0$;

г) $\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{ctg} 2 \cdot \operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 4 \cdot (x^2 + 2) > 0$.

119 Разберите решение примеров 10—13 в § 13 учебника.

Сравните числа a и b:

○**13.36.** а) $a = \sin 1$, $b = \cos 1$; б) $a = \sin 4$, $b = \cos 4$; в) $a = \sin 2$, $b = \cos 2$; г) $a = \sin 7$, $b = \cos 7$.

●**13.37.** а) $a = \sin 1$, $b = \cos 6$; б) $a = \sin 2$, $b = \cos 4$; в) $a = \sin 4$, $b = \cos 2$; г) $a = \sin 3$, $b = \cos 5$.

Расположите в порядке возрастания числа:

○**13.38.** а) $\sin \frac{\pi}{7}$; $\sin \frac{\pi}{5}$; $\sin \frac{2\pi}{3}$; $\sin \frac{7\pi}{6}$; $\sin \frac{4\pi}{3}$;

б) $\cos \frac{\pi}{8}$; $\cos \frac{\pi}{3}$; $\cos \frac{5\pi}{6}$; $\cos \frac{5\pi}{4}$; $\cos \frac{7\pi}{4}$.

●**13.39.** а) $\sin 2$, $\sin 3$, $\cos 4$, $\cos 5$;

б) $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 6$, $\cos 7$;

в) $\sin 3$, $\sin 4$, $\sin 6$, $\sin 7$;

г) $\cos 2$, $\cos 3$, $\sin 4$, $\sin 5$.

●**13.40.** а) 1, $\sin 1$, $\cos 1$, $\operatorname{tg} 1$; б) 2, $\sin 2$, $\cos 2$, $\operatorname{ctg} 2$.

●**13.41.** а) $\frac{1}{2}$, $\sin\frac{1}{2}$, $\sin\frac{13}{24}$; б) $\frac{1}{2}$, $\cos 1$, $\cos 1{,}1$.

Вычислите:

●**13.42.** а) $\sqrt{\sin^2 1 + \sin^2 2 - 2\sin 1 \cdot \sin 2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \sin 1 + \sin^2 1} + \sqrt{1 + \sin^2 2 - 2\sin 2}$;

б) $\sqrt{\cos^2 6 + \cos^2 7 - 2\cos 6 \cdot \cos 7} + \sqrt{\frac{1}{4} - \cos 7 + \cos^2 7} + \sqrt{1 + \cos^2 6 - 2\cos 6}$.

●**13.43.** а) $\sqrt{\sin^2 5 - 2\sin 5 \cdot \sin \frac{11\pi}{6} + \sin^2 \frac{11\pi}{6}} - \sqrt{\sin^2 \frac{5\pi}{6} - 2\sin \frac{5\pi}{6} \cdot \sin 5 + \sin^2 5}$;

б) $\sqrt{\cos^2 4 - 2\cos 4 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \cos^2 \frac{2\pi}{3}} + \sqrt{\cos^2 4 - 2\cos 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3}}$.

Разберите решение примеров 7—9 в § 13 учебника. 118

Решите неравенство:

○13.44. а) $\sin t > 0$;
б) $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\sin t < 0$;
г) $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

○13.45. а) $\cos t > 0$;
б) $\cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $\cos t < 0$;
г) $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

○13.46. а) $\sin t < -\frac{1}{2}$;
б) $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $\sin t > -\frac{1}{2}$;
г) $\sin t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

○13.47. а) $\cos t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $\cos t < -\frac{1}{2}$;
в) $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
г) $\cos t > -\frac{1}{2}$.

○13.48. а) $\sin t \leqslant \frac{1}{2}$;
б) $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $\sin t \geqslant -\frac{1}{2}$;
г) $\cos t \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решите систему неравенств:

○13.49. а) $\begin{cases} \sin t > 0, \\ \sin t < \frac{1}{2}; \end{cases}$
б) $\begin{cases} \cos t < 0, \\ \cos t > -\frac{1}{2}; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$
г) $\begin{cases} \cos t > \frac{1}{2}, \\ \cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

○13.50. а) $\begin{cases} \sin t > 0, \\ \cos t < \frac{1}{2}; \end{cases}$
б) $\begin{cases} \cos t < 0, \\ \sin t > -\frac{1}{2}; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$
г) $\begin{cases} \cos t > \frac{1}{2}, \\ \sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

○**13.51.** Решите неравенство:

а) $\sin t \cdot \cos t > 0$;
б) $\sin t \cdot \operatorname{tg} t \leqslant 0$;
в) $\operatorname{ctg} t \cdot \cos t < 0$;
г) $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t \geqslant 0$.

Докажите неравенство:

○**13.52.** а) $\sin t < \operatorname{tg} t$, если $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

б) $\cos t < \operatorname{ctg} t$, если $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

●**13.53.** а) $1 < \sin 1 + \cos^2 1 < 1{,}25$;

б) $2 < 2\sin^2 1{,}2 + \cos 1{,}2 < \frac{17}{8}$.

●**13.54.** а) $0 < \operatorname{tg} \frac{17}{7} + \cos^{-2} \frac{17}{7} < 1$;

б) $-1 < \sin^{-2} 4 + \operatorname{ctg} 4 < 1$.

●**13.55.** Решите уравнение $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + \cos^2 \frac{3\pi x}{4} = 0$.

§ 14 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

Упростите выражение:

14.1. а) $1 - \sin^2 t$;
б) $\cos^2 t - 1$;
в) $1 - \cos^2 t$;
г) $\sin^2 t - 1$.

14.2. а) $(1 - \sin t)(1 + \sin t)$;
б) $\cos^2 t + 1 - \sin^2 t$;
в) $(1 - \cos t)(1 + \cos t)$;
г) $\sin^2 t + 2\cos^2 t - 1$.

14.3. а) $\frac{1}{\cos^2 t} - 1$;
б) $\frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t}$;
в) $1 - \frac{1}{\sin^2 t}$;
г) $\frac{1 - \cos^2 t}{1 - \sin^2 t}$.

14.4. а) $\frac{(\sin t + \cos t)^2}{1 + 2\sin t \cos t}$;
б) $\frac{1 - 2\sin t \cos t}{(\cos t - \sin t)^2}$.

14.5. Докажите тождество:

а) $\frac{\cos^2 t}{1 - \sin t} - \sin t = 1$;
б) $\frac{\sin^2 t}{1 + \cos t} + \cos t = 1$.

14.6. Докажите, что при всех допустимых значениях t выражение принимает одно и то же значение:

а) $(\sin t + \cos t)^2 - 2\sin t \cos t$;

б) $\dfrac{2 - \sin^2 t - \cos^2 t}{3\sin^2 t + 3\cos^2 t}$;

в) $\sin^4 t + \cos^4 t + 2\sin^2 t \cos^2 t$;

г) $\dfrac{\sin^4 t - \cos^4 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}$.

14.7. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $s = f(t)$, если:

а) $f(t) = 1 - (\cos^2 t - \sin^2 t)$;

б) $f(t) = 1 - \sin t \cos t \operatorname{tg} t$;

в) $f(t) = \cos^2 t \operatorname{tg}^2 t + 5\cos^2 t - 1$;

г) $f(t) = \sin t + 3\sin^2 t + 3\cos^2 t$.

Упростите выражение:

14.8. а) $\dfrac{\cos^2 t - \operatorname{ctg}^2 t}{\sin^2 t - \operatorname{tg}^2 t}$;

в) $\cos^2 t - \sin^2 t(\operatorname{ctg}^2 t + 1)$;

б) $\operatorname{ctg}^2 t - (\sin^{-2} t - 1)$;

г) $\dfrac{\sin^2 t - 1}{\cos^2 t - 1} + \operatorname{tg} t \operatorname{ctg} t$.

14.9. а) $\dfrac{\sin t}{1 + \cos t} + \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$;

в) $\dfrac{\cos t}{1 + \sin t} + \dfrac{\cos t}{1 - \sin t}$;

б) $\operatorname{ctg}^2 t(\cos^2 t - 1) + 1$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg} t + 1}{1 + \operatorname{ctg} t}$.

14.10. а) $(3\sin t + 4\cos t)^2 + (4\sin t - 3\cos t)^2$;

б) $(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)^2 - (\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t)^2$;

в) $\sin t \cos t\,(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)$;

г) $\sin^2 t \cos^2 t(\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t + 2)$.

Докажите тождество:

14.11. а) $\dfrac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t} = \sin^2 t$;

в) $\dfrac{\operatorname{ctg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t} = \cos^2 t$;

б) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{ctg} t} = \operatorname{tg} t$;

г) $\dfrac{1 - \operatorname{ctg} t}{1 - \operatorname{tg} t} = -\operatorname{ctg} t$.

14.12. а) $1 + \sin t = \dfrac{\cos t + \operatorname{ctg} t}{\operatorname{ctg} t}$;

в) $\dfrac{1 - \sin t}{\cos t} = \dfrac{\cos t}{1 + \sin t}$;

б) $\dfrac{\sin t + \operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t} = 1 + \cos t$;

г) $\dfrac{\sin t}{1 - \cos t} = \dfrac{1 + \cos t}{\sin t}$.

○**14.13.** Докажите тождество:

а) $\dfrac{(\sin t + \cos t)^2 - 1}{\operatorname{ctg} t - \sin t \cos t} = 2\operatorname{tg}^2 t$;

б) $\sin^3 t(1 + \operatorname{ctg} t) + \cos^3 t(1 + \operatorname{tg} t) = \sin t + \cos t$;

в) $\dfrac{(\sin t + \cos t)^2 - 1}{\operatorname{tg} t - \sin t \cos t} = 2\operatorname{ctg}^2 t$;

г) $\dfrac{1 - 4\sin^2 t \cos^2 t}{(\sin t + \cos t)^2} + 2\sin t \cos t = 1$.

По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

14.14. а) $\sin t = \dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$;

б) $\sin t = \dfrac{5}{13}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$;

в) $\sin t = -0{,}6$, $-\dfrac{\pi}{2} < t < 0$;

г) $\sin t = -0{,}28$, $\pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$.

14.15. а) $\cos t = 0{,}8$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$;

в) $\cos t = 0{,}6$, $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$;

б) $\cos t = -\dfrac{5}{13}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$;

г) $\cos t = -\dfrac{24}{25}$, $\pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$.

14.16. а) $\operatorname{tg} t = \dfrac{3}{4}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$;

в) $\operatorname{tg} t = -\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$;

б) $\operatorname{tg} t = 2{,}4$, $\pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$;

г) $\operatorname{tg} t = -\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$.

○**14.17.** а) $\operatorname{ctg} t = \dfrac{12}{5}$, $3\pi < t < \dfrac{7\pi}{2}$;

б) $\operatorname{ctg} t = \dfrac{7}{24}$, $2\pi < t < \dfrac{5\pi}{2}$;

в) $\operatorname{ctg} t = -\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{7\pi}{2} < t < 4\pi$;

г) $\operatorname{ctg} t = -\dfrac{8}{15}$, $\dfrac{5\pi}{2} < t < 3\pi$.

○**14.18.** а) Дано: $\sin(4\pi + t) = \dfrac{3}{5}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$. Вычислите: $\operatorname{tg}(\pi - t)$.

б) Дано: $\cos(2\pi + t) = \dfrac{12}{13}$, $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$. Вычислите: $\operatorname{ctg}(\pi - t)$.

○**14.19.** а) Дано: $\cos t = -\frac{5}{13}$, $8{,}5\pi < t < 9\pi$. Вычислите: $\sin(-t)$.

б) Дано: $\sin t = \frac{4}{5}$, $\frac{9\pi}{2} < t < 5\pi$. Вычислите: $\cos(-t) + \sin(-t)$.

○**14.20.** а) Известно, что $\sin t + \cos t = 0{,}8$. Вычислите: $\sin t \cos t$.

б) Известно, что $\sin t - \cos t = \frac{1}{3}$. Вычислите: $9 \sin t \cos t$.

●**14.21.** Известно, что $\sin t + \cos t = 0{,}6$. Вычислите:

а) $\sin^3 t + \cos^3 t$;

б) $\operatorname{tg} t \sin t + \operatorname{ctg} t \cos t$.

●**14.22.** Известно, что $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = 2{,}3$. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t$;

б) $\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{ctg}^3 t$.

●**14.23.** Известно, $\sin t \cos t = -0{,}5$. Вычислите:

а) $\sin^2 t + \cos^2 t$;

б) $\sin^4 t + \cos^4 t$;

в) $\sin^6 t + \cos^6 t$;

г) $\sin^8 t + \cos^8 t$.

●**14.24.** Известно, что $\sin t \cos t = -\frac{12}{49}$. Вычислите:

а) $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$;

б) $\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t$.

●**14.25.** Вычислите:

а) $\sin t + \cos t$, если $\operatorname{tg} t - \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{7}{12}$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

б) $2 \sin t + \cos t$, если $4 \operatorname{ctg} t + 6 \operatorname{tg} t + 11 = 0$ и $\frac{5\pi}{2} < t < \frac{11\pi}{4}$.

○**14.26.** а) Вычислите $\operatorname{tg} t$, если известно, что $\frac{\sin t + 3\cos t}{\sin t - 3\cos t} = 4$.

б) Вычислите $\operatorname{ctg} t$, если известно, что $\frac{2\sin t - 3\cos t}{2\cos t - 3\sin t} = 3$.

○**14.27.** а) Вычислите $\operatorname{tg} t$, если известно, что $5 \sin t - \cos^2 t = 2{,}36$ и $\frac{5\pi}{2} < t < 3\pi$.

б) Вычислите $\operatorname{ctg} t$, если известно, что $\sin^2 t + 2 \cos t + 0{,}56 = 0$ и $-\frac{7\pi}{2} < t < -3\pi$.

●**14.28.** а) Вычислите $\operatorname{ctg} t$, если известно, что $\frac{2\sin t \cos t}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{4} < t < \pi$.

б) Вычислите $\operatorname{tg} t$, если известно, что $\frac{2\sin^2 t + 3\sin t \cos t - \cos^2 t}{2\cos^2 t - \sin^2 t} = -\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}$.

14.29. Зная, что $\operatorname{tg} t = a$, найдите:

а) $\cos^4 t$; в) $\sin^4 t$;

б) $\sin t \cos t$; г) $\sin^3 t \cos t$.

14.30. Зная, что $\operatorname{ctg} t = a$, найдите:

а) $2\sin^2 t + 3\cos^2 t$; б) $2\sin^2 t - 3\sin t \cos t - 5\cos^2 t$.

Упростите выражение:

14.31. а) $\sqrt{\dfrac{1+\cos t}{1-\cos t}} + \sqrt{\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}} + \dfrac{2}{\sin t}$, если $3\pi < t < \dfrac{7\pi}{2}$;

б) $\sqrt{\dfrac{1-\sin t}{1+\sin t}} + \operatorname{tg} t$, если $2\pi < t < \dfrac{5\pi}{2}$.

14.32. а) $\sqrt{\sin^{-2} t - \operatorname{ctg}^2 t + \cos^2 t - 1} +$

$+ \sqrt{\cos^{-2} t - \operatorname{tg}^2 t + \sin^2 t - 1} + 2\sin t - \cos t$, если

$t \in (13; 14)$;

б) $\sqrt{\sin^2 t(1 - 2\operatorname{ctg} t) + 4\cos^2 t(1 - 0{,}5\operatorname{tg} t)} +$

$+ \sin t + \cos t$, если $t \in (0; 1)$.

14.33. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = \sin^2 x + 2\sin x - 5$;

б) $y = \sin^2 x - 3\cos^2 x + 2\cos x$;

в) $y = 4\cos^2 x - 4\cos x - 2$;

г) $y = \cos^2 x - 3\sin^2 x - 4\sin x$.

Постройте график функции:

14.34. а) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$; в) $y = \sin^2 \sqrt{x} + \cos^2 \sqrt{x}$;

б) $y = \cos^2 \dfrac{1}{x} + \sin^2 \dfrac{1}{x}$; г) $y = \sin^2 \dfrac{1}{x^2 - 4} + \cos^2 \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

14.35. а) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$;

б) $y = 3\cos^2 x + 2\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + 3\sin^2 x$.

14.36. а) Дано: $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Докажите, что $f(\sin x) = 3 - 2\cos^2 x - \sin x$.

б) Дано: $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$. Докажите, что $f(\sin x) = 2\sin x - 3\cos^2 x - 4$.

○**14.37.** а) Дано: $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$. Докажите, что $-f(\cos x) = 2\sin^2 x + 3\cos x$.

б) Дано: $f(x) = 5x^2 + x + 4$. Докажите, что $f(\cos x) = 9 + \cos x - 5\sin^2 x$.

○**14.38.** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + 1$. Докажите, что:

а) $f(\operatorname{tg} x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; б) $f(\operatorname{ctg} x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

●**14.39.** Сколько целых чисел содержится в области значений функции:

а) $y = \sqrt{8 - 27\sin x - 4\sin^2 x}$;

б) $y = \sqrt{4 + 24\cos x - \sin^2 x}$?

§ 15 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛОВОГО АРГУМЕНТА

Переведите из градусной меры в радианную:

15.1. а) 120°; б) 220°; в) 300°; г) 765°.

15.2. а) 210°; б) 150°; в) 330°; г) 675°.

Переведите из радианной меры в градусную:

15.3. а) $\dfrac{3\pi}{4}$; б) $\dfrac{11\pi}{3}$; в) $\dfrac{6\pi}{5}$; г) $\dfrac{46\pi}{9}$.

15.4. а) $\dfrac{5\pi}{8}$; б) $\dfrac{7\pi}{12}$; в) $\dfrac{11\pi}{12}$; г) $\dfrac{47\pi}{9}$.

Вычислите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для заданного значения угла α:

15.5. а) 90°; б) 180°; в) 270°; г) 360°.

15.6. а) 30°; б) 150°; в) 210°; г) 240°.

Расположите в порядке возрастания числа:

○**15.7.** а) $\sin 40°$, $\sin 80°$, $\sin 120°$, $\sin 160°$;

б) $\cos 40°$, $\cos 80°$, $\cos 120°$, $\cos 160°$.

○**15.8.** а) $\sin 380°$, $\sin 830°$, $\sin 210°$, $\sin 1000°$;

б) $\cos 390°$, $\cos 460°$, $\cos 920°$, $\cos 650°$.

○**15.9.** а) $\sin 22{,}5°$, $\cos 37{,}4°$, $\cos 990°$, $\sin 990°$;

б) $\operatorname{tg} 100°$, $\operatorname{ctg} 225°$, $\cos 94{,}3°$, $\sin 77°$.

15.10. В прямоугольном треугольнике известны длина гипотенузы c и острый угол α. Найдите длину катетов, площадь и радиус описанной окружности, если:

а) $c = 12$, $\alpha = 60°$;   в) $c = 4$, $\alpha = 30°$;

б) $c = 6$, $\alpha = 45°$;   г) $c = 60$, $\alpha = 60°$.

15.11. Хорда AB образует с диаметром AC окружности угол $\alpha°$. Найдите длину хорды AB, если радиус окружности равен R.

○**15.12.** Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними.

○**15.13.** В $\triangle ABC$ известно, что $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$. Найдите BC, AC и площадь $\triangle ABC$.

○**15.14.** Высота треугольника равна 5 см, а углы, прилегающие к основанию, равны $60°$ и $45°$. Найдите площадь треугольника.

●**15.15.** Использовав геометрические соображения, вычислите:

а) $\sin 15°$ и $\cos 15°$;   б) $\sin 22{,}5°$ и $\cos 22{,}5°$.

Вычислите:

○**15.16.** а) $\sin^2 733° + \cos^2 347°$;

б) $2\cos^2 395° + \sin^2 1000° + 2\sin^2 755° + \cos^2 800°$.

○**15.17.** а) $\mathrm{tg}\, 1°\ \mathrm{tg}\, 2°\ \mathrm{tg}\, 3° \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}\, 89°$;

б) $\mathrm{ctg}\, 2°\ \mathrm{ctg}\, 4°\ \mathrm{ctg}\, 6° \cdot \ldots \cdot \mathrm{ctg}\, 178°$.

●**15.18.** а) $\sin^2 1° + \sin^2 2° + \sin^2 3° + \ldots + \sin^2 90°$;

б) $\cos^2 1° + \cos^2 2° + \cos^2 3° + \ldots + \cos^2 180°$.

○**15.19.** Докажите, что верно равенство:

а) $(4\sin 30° + \mathrm{tg}\, 60°)\left(\dfrac{1}{\cos(-60°)} + \mathrm{ctg}\, 150°\right) = 2\sin 150°$;

б) $(\mathrm{ctg}\, 210° + 2\cos 120°)(\mathrm{tg}\, 420° - 2\sin 330°) = 4\cos^2 315°$.

●**15.20.** Дано выражение $\sin 1°\ \sin 2°\ \sin 3° \cdot \ldots \cdot \sin n°$.

а) При каких натуральных значениях n это выражение положительно?

б) При каких натуральных значениях n это выражение отрицательно?

в) При каких натуральных значениях n это выражение равно нулю?

15.21. Дано выражение $\cos 1^\circ \cos 2^\circ \cos 3^\circ \cdot ... \cdot \cos n^\circ$.

а) При каких натуральных значениях n это выражение положительно?

б) При каких натуральных значениях n это выражение отрицательно?

в) При каких натуральных значениях n это выражение равно нулю?

15.22. Дано выражение $\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + ... + \sin n^\circ$.

а) При каких натуральных значениях n это выражение положительно?

б) При каких натуральных значениях n это выражение отрицательно?

в) При каких натуральных значениях n это выражение равно нулю?

15.23. Дано выражение $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + ... + \cos n^\circ$.

а) При каких натуральных значениях $n \leqslant 360$ это выражение положительно?

б) При каких натуральных значениях $n \leqslant 360$ это выражение отрицательно?

в) При каких натуральных значениях n это выражение равно нулю?

15.24. Использовав равнобедренный треугольник с углом 36° при вершине, вычислите $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\sin 36^\circ$, $\cos 36^\circ$.
Указание. Проведите биссектрису угла при основании треугольника.

§ 16 ФУНКЦИИ $y = \sin x$, $y = \cos x$, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Прочитайте п. 1 в § 16 учебника. 136

16.1. Найдите значение функции:

а) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ при $x = \frac{4\pi}{3}$;

б) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ при $x = -\frac{\pi}{2}$;

в) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ при $x = \frac{7\pi}{6}$;

г) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ при $x = -\frac{15\pi}{4}$.

16.2. Не выполняя построения, ответьте на вопрос: принадлежит ли графику функции $y = \sin x$ точка с координатами:

а) $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{2}\right)$; в) $(\pi; 1)$; г) $\left(\frac{3\pi}{2}; -1\right)$?

16.3. Принадлежит ли графику функции $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ точка:

а) $\left(0; \frac{3}{2}\right)$; в) $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{3}{2}\right)$;

б) $\left(\frac{\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$; г) $(4\pi; 2{,}5)$?

16.4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin x$:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]$; в) на интервале $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$;

б) на луче $\left[\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$; г) на полуинтервале $\left(-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$.

Исследуйте функцию на чётность:

○**16.5.** а) $f(x) = x^5 \sin\frac{x}{2}$; в) $f(x) = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{x^3}$;

б) $f(x) = x^3 \sin x^2$; г) $f(x) = x^3 - \sin x$.

○**16.6.** а) $f(x) = x + \sin x$; в) $f(x) = \dfrac{x^2 \sin x}{x^2 - 9}$;

б) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$; г) $f(x) = \sin^2 x - x^4$.

○**16.7.** Найдите все значения x, при которых заданному промежутку принадлежит только одно целое число; укажите это число:

а) $(5 - 2\sin x; 5 + 2\sin x)$;

б) $[4 + 2\cos x; 4 - 2\cos x]$.

16.8. Постройте график функции:

а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = \sin(x - \pi)$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Постройте график функции:

16.9. а) $y = \sin x - 2$;
б) $y = \sin x + 1$;
в) $y = \sin x + 2$;
г) $y = \sin x - 3$.

○**16.10.** а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$;
б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

○**16.11.** а) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;
б) $y = -\sin x + 3$.

○**16.12.** а) $y = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$;
б) $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$;
в) $y = \sin(x - \pi) - 1$;
г) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$.

○**16.13.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}5$ на промежутке:

а) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$;
б) $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$;
в) $[0; \pi)$;
г) $\left[\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$.

16.14. Известно, что $f(x) = 3\sin x$. Найдите:
а) $f(-x)$;
б) $2f(x)$;
в) $2f(x) + 1$;
г) $f(-x) + f(x)$.

16.15. Известно, что $f(x) = \sin 2x$. Найдите:
а) $f(-x)$;
б) $2f(x)$;
в) $f\left(-\frac{x}{2}\right)$;
г) $f(-x) + f(x)$.

16.16. Исследуйте функцию $y = \sin x$ на монотонность на заданном промежутке:

а) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$;
б) $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$;
в) $\left(\frac{11\pi}{3}; \frac{25\pi}{6}\right)$;
г) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right)$.

○**16.17.** На каких промежутках функция $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$:

а) возрастает;
б) убывает?

●16.18. Докажите, что функция $y = \sin x$:
а) возрастает на отрезке $[12; 13]$;
б) убывает на интервале $(8; 10)$;
в) достигает на интервале $(7; 12)$ наименьшего и наибольшего значений;
г) не достигает на интервале $(-1; 1)$ ни наименьшего, ни наибольшего значений.

Решите графически уравнение:

○16.19. а) $\sin x = x + \pi$; в) $\sin x + x = 0$;
б) $\sin x = 2x$; г) $\sin x = 2x - 2\pi$.

○16.20. а) $\sin x = \dfrac{2}{\pi}x$; в) $\sin x = -\dfrac{4}{\pi}x + 3$;
б) $\sin x + \left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)^2 + 1 = 0$; г) $\sin x = x^2 + 1$.

○16.21. а) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \pi - 3x$;
б) $\sin x - \sqrt{x - \pi} = 0$;
в) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + 1$;
г) $-\sin x = \sqrt{x}$.

141 **Прочитайте п. 2 в § 16 учебника.**

16.22. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{\cos x}$, если:
а) $x = \dfrac{2\pi}{3}$; б) $x = \dfrac{11\pi}{6}$.

16.23. Найдите значение выражения $2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, если:
а) $x = -\dfrac{\pi}{2}$; б) $x = \dfrac{\pi}{4}$.

16.24. Принадлежит ли графику функции $y = \cos x$ точка с координатами:
а) $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$; в) $\left(\dfrac{2\pi}{3}; -\dfrac{1}{2}\right)$;
б) $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{1}{2}\right)$; г) $\left(\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$?

16.25. Принадлежит ли графику функции $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ точка с координатами:

а) $\left(0;\ \sqrt{3} + 1\right)$;

б) $\left(\frac{\pi}{6};\ 1\right)$;

в) $\left(\frac{\pi}{2};\ 2\right)$;

г) $\left(\frac{\pi}{6};\ 3\right)$?

16.26. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos x$:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{2\pi}{3}\right]$;

б) на интервале $\left(-\pi;\ \frac{\pi}{4}\right)$;

в) на луче $\left[-\frac{\pi}{4};\ +\infty\right)$;

г) на полуинтервале $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Исследуйте функцию на чётность:

○**16.27.** а) $f(x) = \sin x \cos x$;

б) $f(x) = \frac{\cos x^3}{4 - x^2}$;

в) $f(x) = \frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)}$;

г) $f(x) = (4 + \cos x)(\sin^6 x - 1)$.

○**16.28.** а) $f(x) = x^2 \cos x$;

б) $f(x) = x^5 \cos 3x$;

в) $f(x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$;

г) $f(x) = x^{11} \cos x + \sin x$.

○**16.29.** Найдите область значений заданной функции на заданном промежутке:

а) $y = \sin x,\ x \in \left[\frac{\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}\right]$;

б) $y = \cos x,\ x \in (1;\ +\infty)$;

в) $y = \sin x,\ x \in (-1;\ 6)$;

г) $y = \cos x,\ x \in [1{,}2;\ 7{,}5]$.

16.30. Докажите тождество:

а) $\sin^2(x - 8\pi) = 1 - \cos^2(16\pi - x)$;

б) $\cos^2(4\pi + x) = 1 - \sin^2(22\pi - x)$.

○**16.31.** Найдите основной период функции:

а) $y = \sin 2x$;

б) $y = \cos 3x$;

в) $y = \sin\frac{x}{2}$;

г) $y = \cos\frac{3x}{4}$.

○**16.32.** Преобразуйте заданное выражение ($\sin t$ или $\cos t$) к виду $\sin t_0$ или $\cos t_0$ так, чтобы выполнялось соотношение $0 < t_0 < 2\pi$:

а) $\sin 8$; б) $\cos(-10)$; в) $\sin(-25)$; г) $\cos 35$.

16.33. Вычислите:

а) $\cos(t + 4\pi)$, если $\cos(2\pi - t) = -\frac{3}{5}$;

б) $\sin(32\pi - t)$, если $\sin(2\pi - t) = \frac{5}{13}$.

16.34. Решите уравнение:

а) $\sin(t + 2\pi) + \sin(t - 4\pi) = 1$;

б) $3\cos(2\pi + t) + \cos(t - 2\pi) + 2 = 0$;

в) $\sin(t + 4\pi) + \sin(t - 6\pi) = \sqrt{3}$;

г) $\cos(t + 2\pi) + \cos(t - 8\pi) = \sqrt{2}$.

Найдите область значений функции:

○**16.35.** а) $y = 2\sin x$; в) $y = -3\cos x + 2$;

б) $y = (3\cos x - 2)^4$; г) $y = (1 + 4\sin x)^2$.

○**16.36.** а) $y = \frac{1}{\sin x + 2}$; в) $y = \frac{2}{\sin x - 3}$;

б) $y = \frac{8}{3\cos x - 5}$; г) $y = \frac{15}{4 + \cos x}$.

○**16.37.** а) $y = \sin^2 x - 6\sin x + 8$; в) $y = \cos^2 x + \cos x + 2$;

б) $y = \sqrt{2 - \cos x}$; г) $y = \sqrt{8\sin x - 4}$.

○**16.38.** Найдите все целочисленные значения функции:

а) $y = 5 + 4\cos x$; в) $y = 3 - 2\sin x$;

б) $y = \sqrt{2 - 7\cos x}$; г) $y = \sqrt{11 + 2\sin x}$.

Постройте график функции:

16.39. а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \cos x - 2$; г) $y = \cos x + 1{,}5$.

○**16.40.** а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$; в) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$;

б) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$; г) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$.

16.41. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1{,}5$ на промежутке:

а) $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$; б) $(1; 9)$; в) $[231; 238]$; г) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

16.42. Известно, что $f(x) = -\frac{1}{2}\cos x$. Найдите:

а) $f(-x)$;
б) $2f(x)$;
в) $f(x + 2\pi)$;
г) $f(-x) - f(x)$.

16.43. Известно, что $f(x) = \cos\frac{x}{3}$. Найдите:

а) $f(-x)$;
б) $3f(x)$;
в) $f(-3x)$;
г) $f(-x) - f(x)$.

16.44. Исследуйте функцию $y = \cos x$ на монотонность на заданном промежутке:

а) $[3\pi; 4\pi]$;
б) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$;
в) $\left(\frac{7\pi}{3}; \frac{17\pi}{6}\right)$;
г) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$.

16.45. На каких промежутках функция $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$:

а) возрастает; б) убывает?

16.46. Докажите, что функция $y = \cos x$:

а) возрастает на отрезке $[-3; -0{,}5]$;
б) убывает на интервале $(7; 9)$;
в) достигает на интервале $(3; 7)$ наименьшего и наибольшего значений;
г) не достигает на интервале $(-3; -0{,}5)$ ни наименьшего, ни наибольшего значений.

Решите графически уравнение:

16.47. а) $\cos x = x + \frac{\pi}{2}$; в) $\cos x = 2x + 1$;

б) $-\cos x = 3x - 1$; г) $\cos x = -x + \frac{\pi}{2}$.

16.48. а) $\cos x = \sqrt{x} + 1$; в) $\cos x = -(x - \pi)^2 - 1$;

б) $\cos x = \sqrt{x - \frac{\pi}{2}}$; г) $\cos x = |x| + 1$.

○**16.49.** Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = x^2 + 4x - 1; \end{cases}$　　в) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = -3x^2 - 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$　　г) $\begin{cases} y = \sin x, \\ |x| - y = 0? \end{cases}$

○**16.50.** Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = -x^2 + 2x - 3; \end{cases}$　　в) $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = x^2 - 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = \dfrac{2}{x}; \end{cases}$　　г) $\begin{cases} y = \cos x, \\ |x| - y = 0? \end{cases}$

○**16.51.** Решите графически уравнение:

а) $\sin x = \cos x$;　　б) $\sin x + \cos x = 0$.

●**16.52.** Решите уравнение:

а) $\sin x = \left|\dfrac{3x}{2\pi} - \dfrac{3}{4}\right|$;　　б) $\cos x + \left|\dfrac{3x}{5\pi} - \dfrac{3}{10}\right| = 0,\ x \geqslant 0$.

Решите неравенство:

○**16.53.** а) $\cos x \geqslant 1 + |x|$;　　б) $\sin x \leqslant -\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)^2 - 1$.

●**16.54.** а) $\sin x > \dfrac{3x}{5\pi}$;　　б) $\cos x \leqslant \dfrac{9x}{2\pi} - 1$.

Постройте график функции:

○**16.55.** а) $y = |\sin x|$;　　в) $y = |\cos x|$;

б) $y = \left|\cos x - \dfrac{1}{2}\right|$;　　г) $y = \left|\sin x + \dfrac{1}{2}\right|$.

●**16.56.** а) $y = \sin |x|$;　　в) $y = \cos |x|$;

б) $y = \sin \left|x - \dfrac{\pi}{3}\right|$;　　г) $y = \cos \left|x + \dfrac{2\pi}{3}\right|$.

○**16.57.** Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$　　б) $y = \begin{cases} \sin x, \text{ если } x < 0, \\ x^2, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○16.58. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

а) Вычислите: $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(\pi^2)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

○16.59. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

а) Вычислите: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

Постройте и прочитайте график функции:

○16.60. а) $y = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x < 0, \\ \cos x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -\dfrac{2}{x}, \text{ если } x < 0, \\ -\cos x, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○16.61. а) $y = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x, \text{ если } x > \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -\cos x, \text{ если } x < 0, \\ 2x^2 - 1, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

●16.62. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$;

в) $y = \dfrac{2\cos x}{|\cos x|}$;

б) $y = \operatorname{tg} x \cdot |\cos x|$;

г) $y = \operatorname{ctg} x \cdot |\sin x|$.

○16.63. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} 2x - \pi, \text{ если } x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, \text{ если } \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}, \\ \dfrac{3\pi}{2} - x, \text{ если } x > \dfrac{3\pi}{2}; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \sin x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x^2, \text{ если } 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, \text{ если } x \geqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

16.64. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2x + 2\pi, \text{ если } x \leqslant -\pi, \\ \sin x, \text{ если } -\pi < x \leqslant 0, \\ -2x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

а) Вычислите: $f(-\pi - 2)$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $f(2)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

16.65. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -(x - \pi)^2, \text{ если } x > \pi. \end{cases}$

а) Вычислите: $f(-3)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(2\pi - 3)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

16.66. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \text{ если } -\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0, \\ x + 1, \text{ если } 0 < x < 2, \\ -\sqrt{x - 2} + 3, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

а) Вычислите: $f(0)$, $f(6)$, $f(-\pi - 2)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

Постройте график функции:

16.67. а) $y = \frac{1}{\sin x}$; б) $y = \frac{1}{\cos x}$.

16.68. а) $y = \sin(\sin x)$; в) $y = \cos(\cos x)$;

б) $y = \sin(\cos x)$; г) $y = \cos(\sin x)$.

§ 17 ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = mf(x)$

Постройте график функции:

17.1. а) $y = 3\sqrt{x}$;
в) $y = \frac{1}{3}x^4$;
б) $y = -2|x|$;
г) $y = -\frac{2}{x^2}$.

17.2. а) $y = -2(x - 1)^3$;
в) $y = -2\sqrt{x - 3}$;
б) $y = 3|x + 2|$;
г) $y = 0{,}5x^{-3}$.

17.3. а) $y = 2\sin x$;
в) $y = -\sin x$;
б) $y = 3\cos x$;
г) $y = -\cos x$.

17.4. а) $y = -2\sin x$;
в) $y = 1{,}5\sin x$;
б) $y = -3\cos x$;
г) $y = -1{,}5\cos x$.

17.5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\cos x$:

а) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
в) на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$;
б) на интервале $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$;
г) на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$.

17.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -3\sin x$:

а) на луче $[0; +\infty)$;

б) на открытом луче $\left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right)$;

в) на луче $\left[\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$;

г) на открытом луче $(-\infty; 0)$.

○**17.7.** Постройте график функции:

а) $y = 2\sin x - 1$;
в) $y = -\frac{3}{2}\sin x + 3$;
б) $y = -\frac{1}{2}\cos x + 2$;
г) $y = 3\cos x - 2$.

Постройте график функции:

○**17.8.** а) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = -\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

б) $y = -3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = 1{,}5\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

○**17.9.** а) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$;

б) $y = -3\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) - 2$;

в) $y = -1{,}5\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 2$;

г) $y = 2{,}5\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 1{,}5$.

●**17.10.** а) $y = 2\,|\cos x|$; в) $y = 3\sin|x|$;

б) $y = -3\cos\left|x + \frac{\pi}{6}\right|$; г) $y = -2\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$.

○**17.11.** Подберите коэффициенты a и b так, чтобы на данном рисунке был изображён график функции $y = a\sin x + b$ или $y = a\cos x + b$:

а) рис. 46; б) рис. 47; в) рис. 48; г) рис. 49.

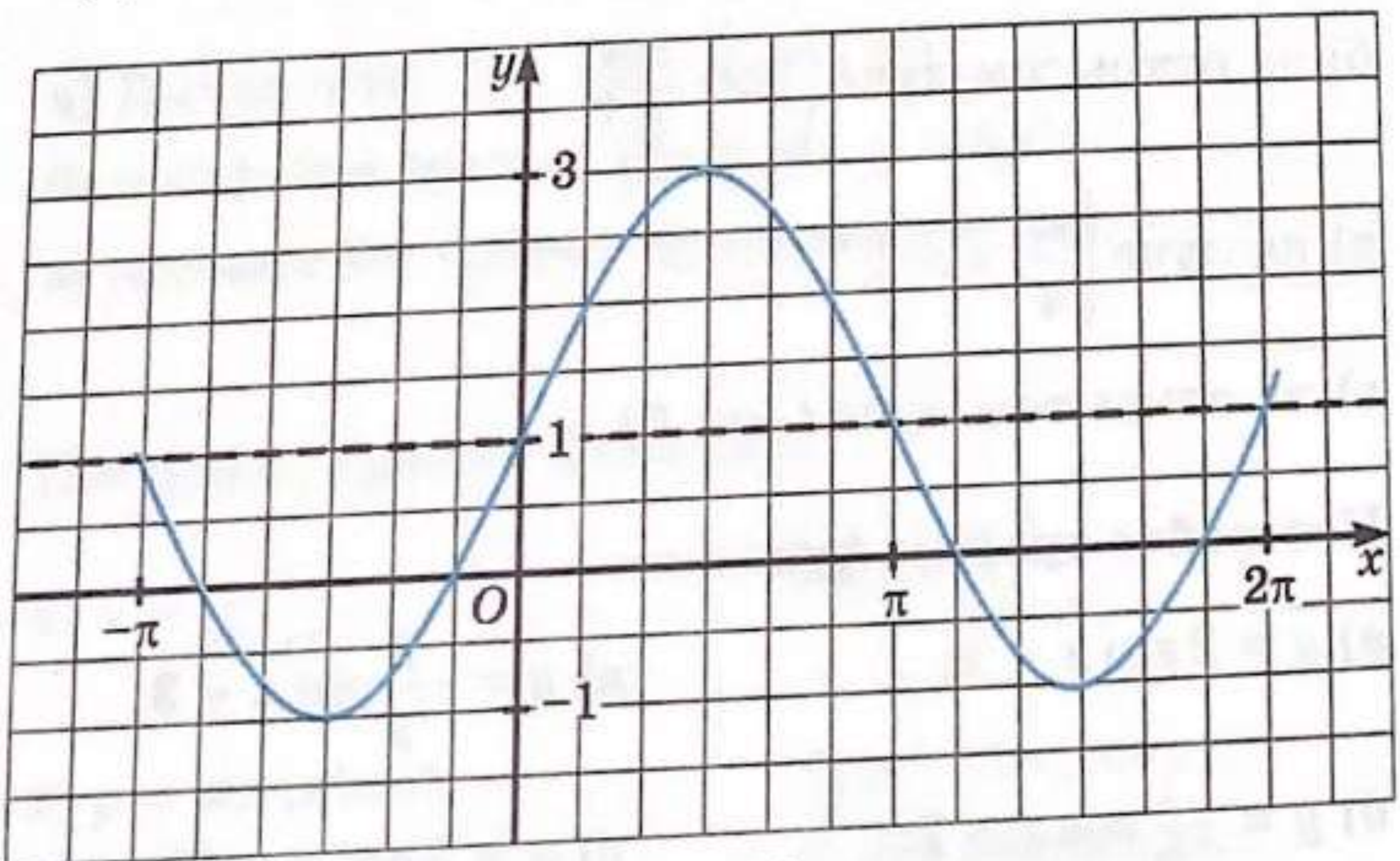


Рис. 46

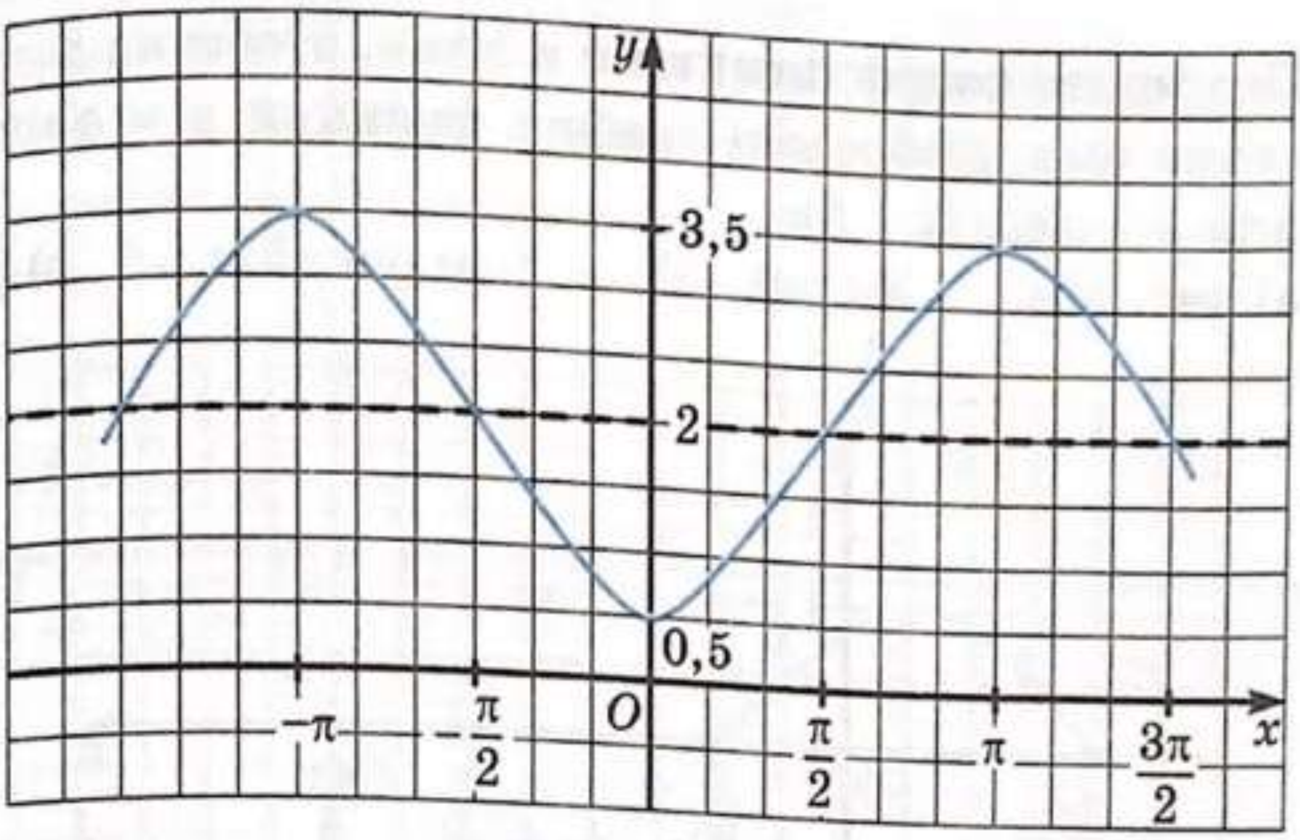


Рис. 47

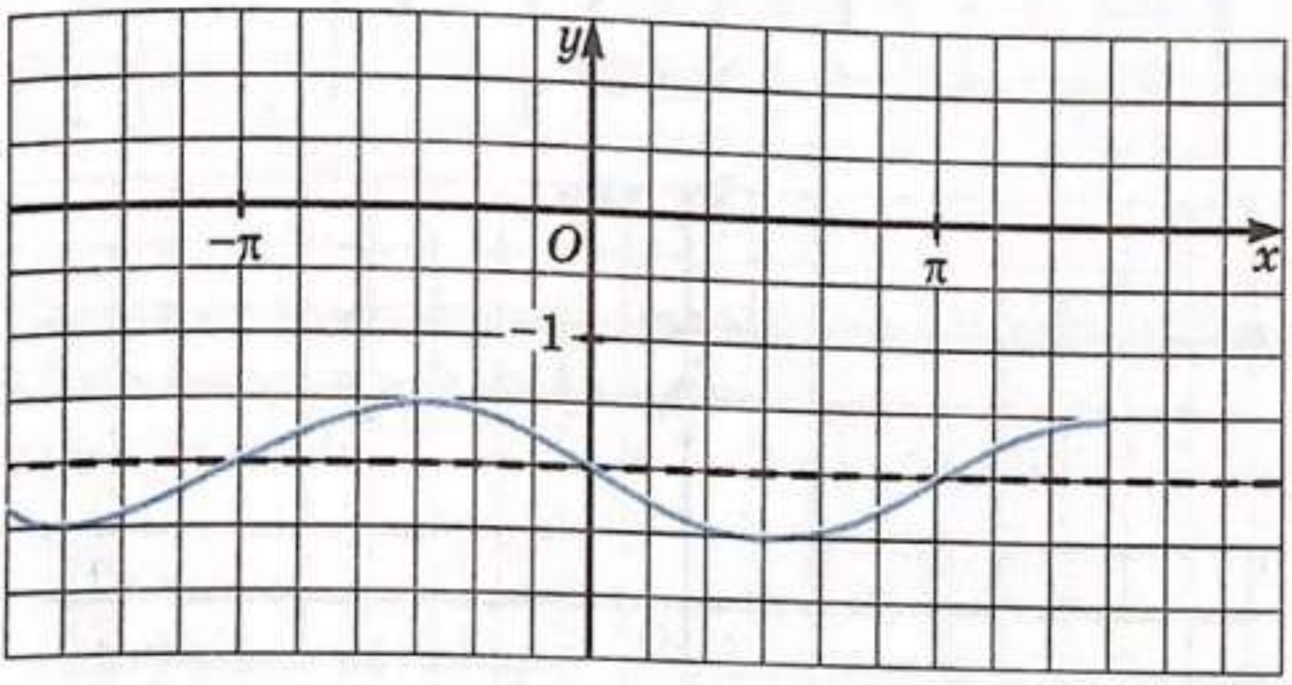


Рис. 48

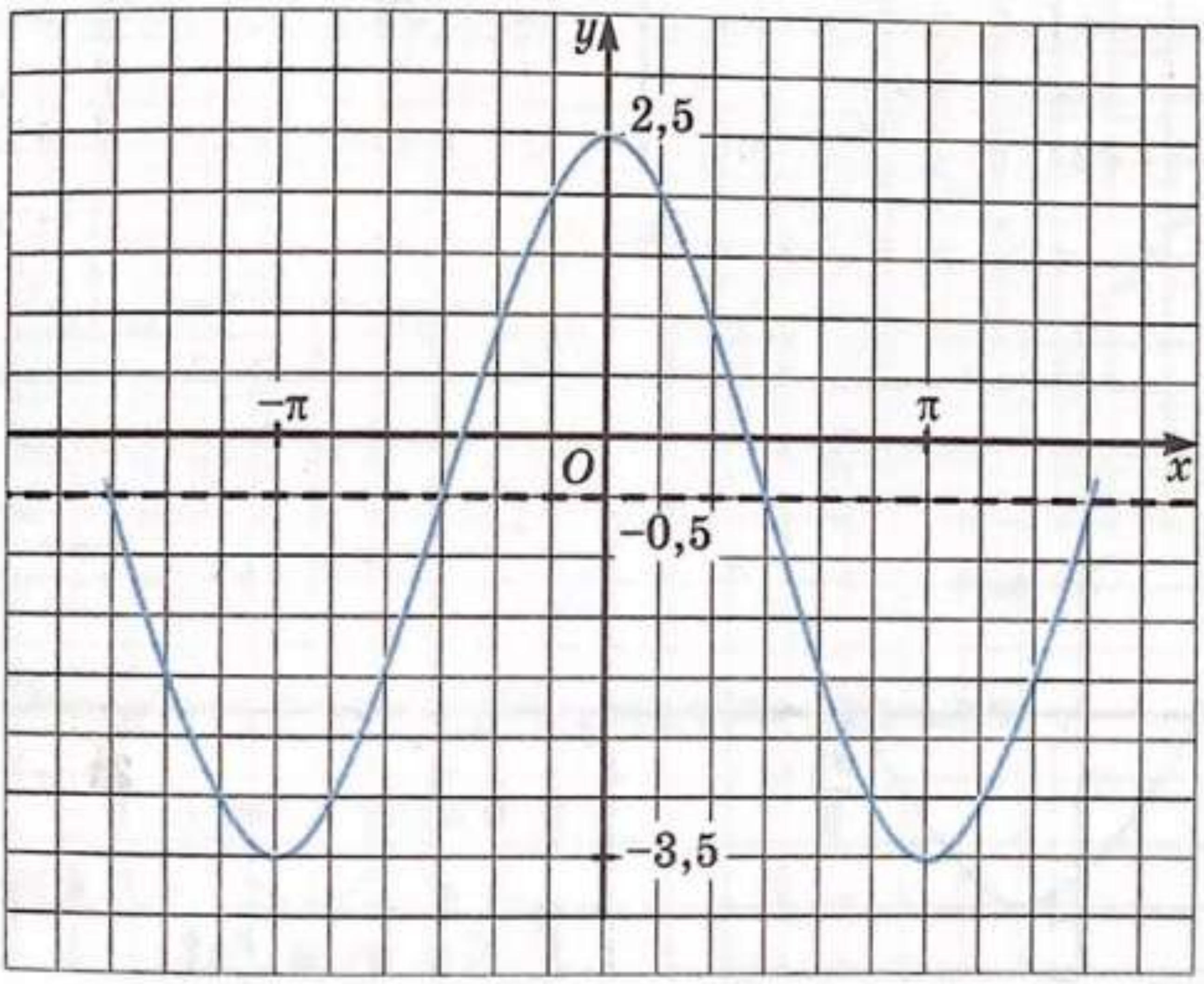


Рис. 49

○**17.12.** Подберите коэффициенты a и b так, чтобы на данном рисунке был изображён график функции $y = a\sin(x + b)$ или $y = a\cos(x + b)$:

а) рис. 50; б) рис. 51; в) рис. 52; г) рис. 53.

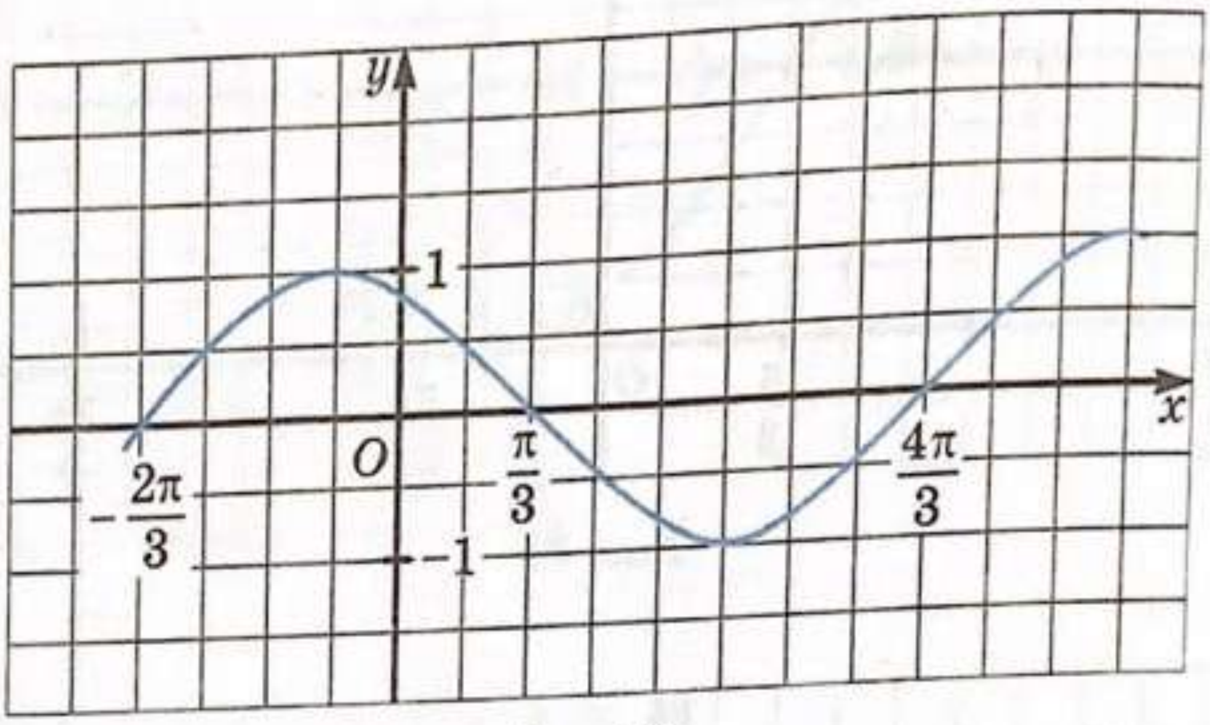


Рис. 50

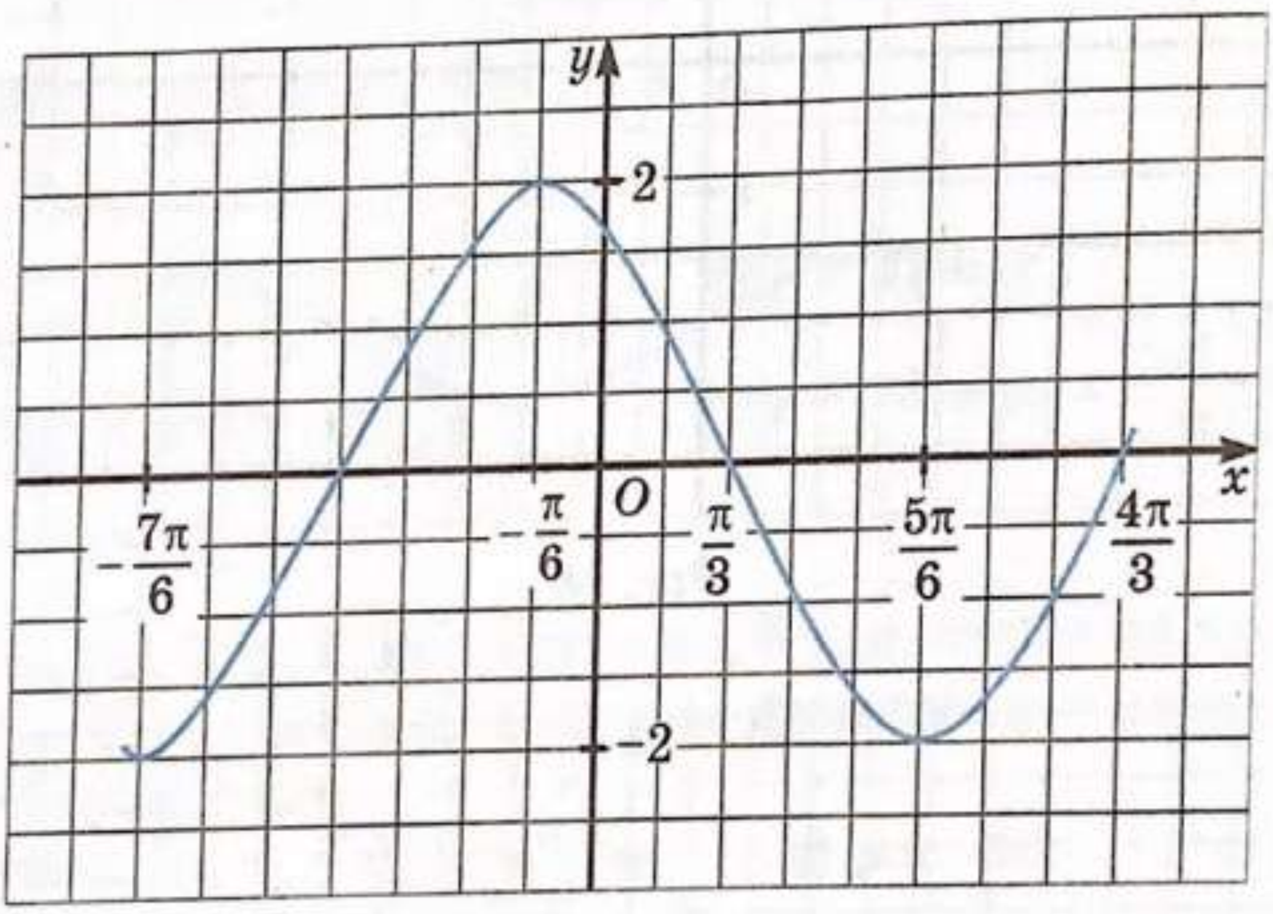


Рис. 51

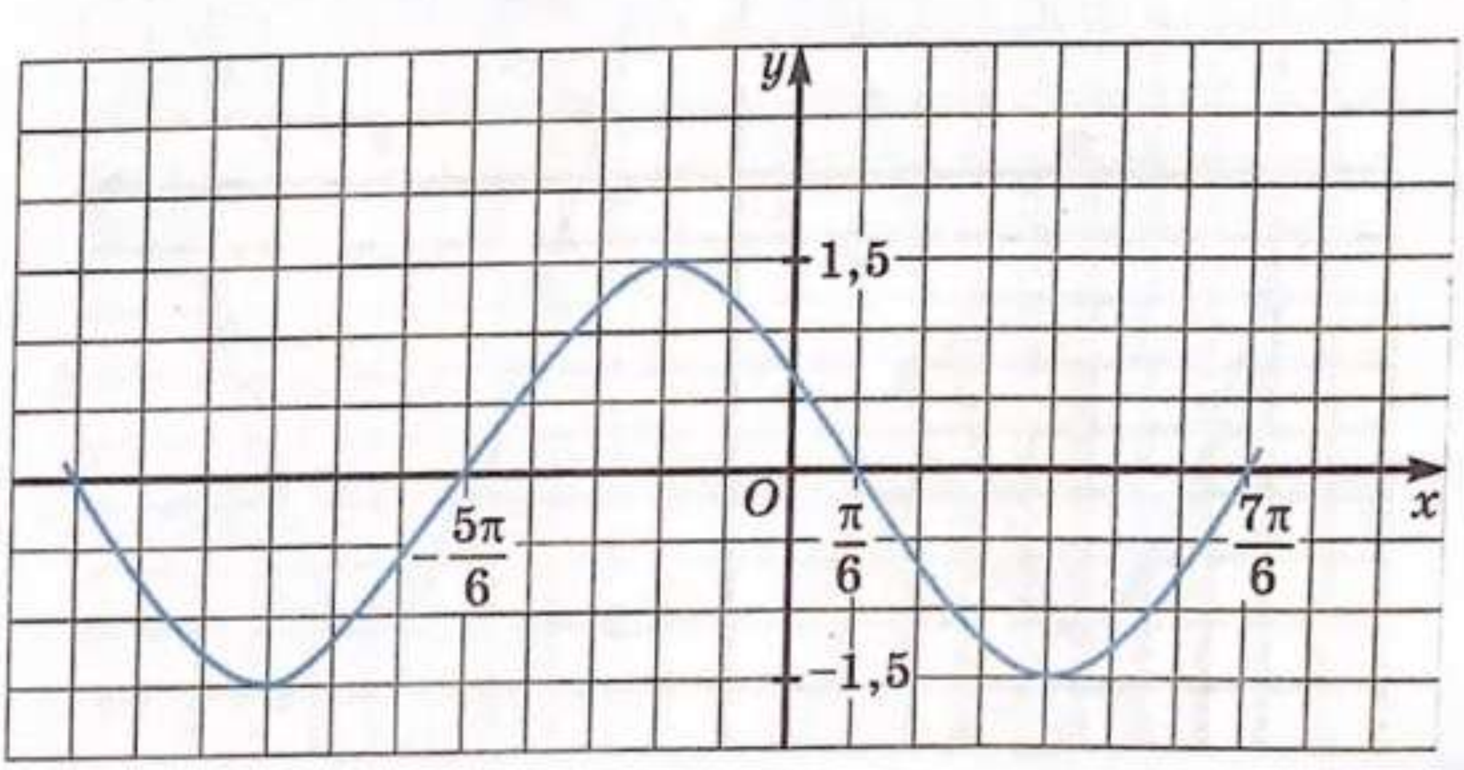


Рис. 52

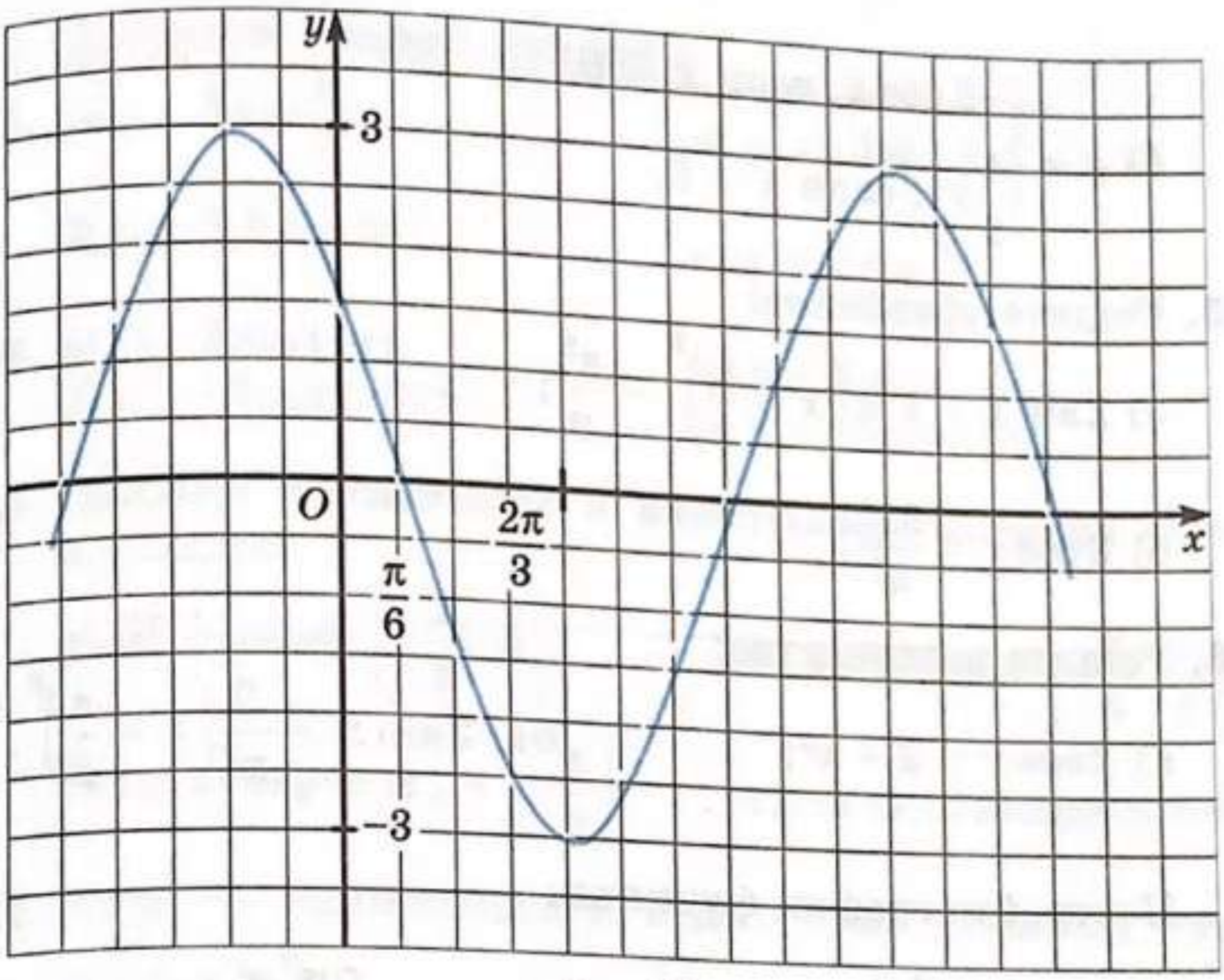


Рис. 53

17.13. Составьте возможную аналитическую запись функции по её графику, изображённому:

а) на рис. 54; б) на рис. 55.

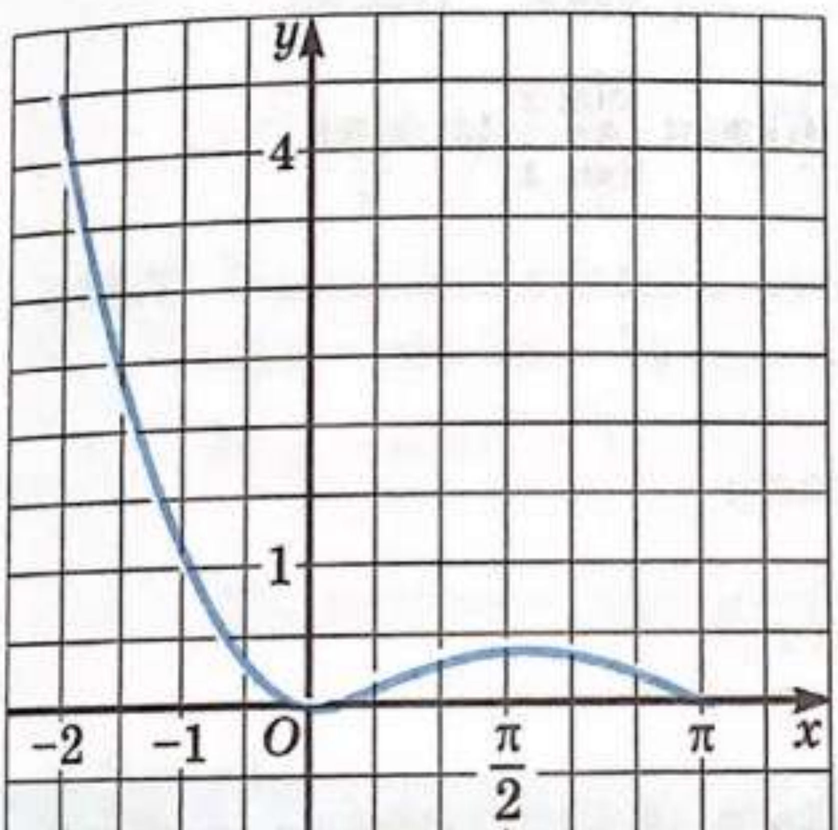


Рис. 54

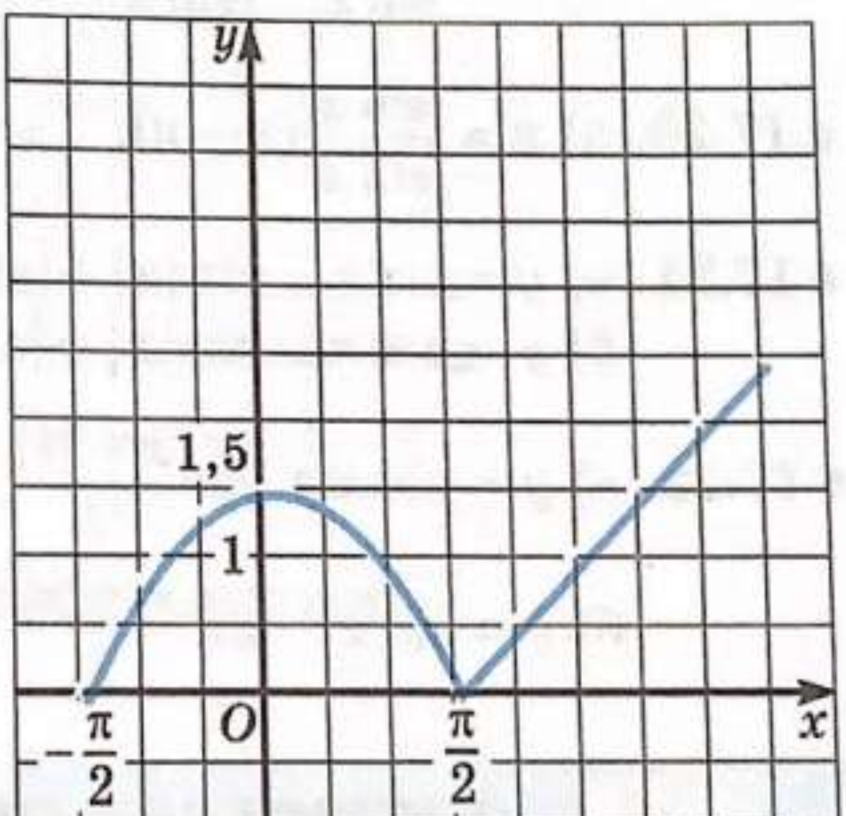


Рис. 55

17.14. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} 3\sin x, \text{ если } x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 3x^3, \text{ если } x \geqslant \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -2\cos x, \text{ если } x < 0, \\ \frac{1}{2}x^4, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

●**17.15.** Решите уравнение:

а) $2\sin x - 1 = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{9}$;

б) $2\cos x = \frac{9x^2}{\pi^2}$.

●**17.16.** Решите неравенство:

а) $2\cos x < 2 + x^4$; б) $-2\sin x > \frac{9}{\pi^2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2$.

Постройте график функции:

●**17.17.** а) $y = \frac{3\sin^3 x}{1 - \cos^2 x}$; б) $y = \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x - 2}$.

●**17.18.** а) $y = 3\sin x + |\sin x|$; б) $y = \cos x - 3|\cos x|$.

●**17.19.** а) $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{|\sin x|}$; б) $y = \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{|\cos x|}$.

●**17.20.** а) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}(x - \pi)$; б) $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}(x + \pi)$.

●**17.21.** а) $y = \sin x + \sin|x| + |\sin x|$;
б) $y = \cos x + \cos|x| - |\cos x|$.

●**17.22.** а) $y = \cos x + \cos\frac{x - |x|}{2} + |\cos x|$;

б) $y = \sin x - \sin\frac{x + |x|}{2} + |\sin x|$.

§ 18 ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(kx)$

Постройте график функции:

18.1. а) $y = \sqrt{2x}$; б) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$; в) $y = (2x)^4$; г) $y = \left|\frac{x}{3}\right|$.

18.2. а) $y = \sin\frac{x}{3}$; в) $y = \cos\frac{x}{2}$;

б) $y = \cos 2x$; г) $y = \sin 3x$.

Постройте график функции:

○**18.3.** а) $y = 3\sin\frac{x}{2}$; в) $y = -3\sin 2x$;

б) $y = 2{,}5\cos 2x$; г) $y = 2\cos\frac{x}{3}$.

○**18.4.** а) $y = 3\sin(-x)$; в) $y = 2\sin(-2x)$;

б) $y = -2\cos(-3x)$; г) $y = -3\cos(-x)$.

18.5. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin 2x$:

а) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; в) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$;

б) на интервале $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$; г) на полуинтервале $(0; \pi]$.

18.6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos\frac{x}{3}$:

а) на луче $[0; +\infty)$;

б) на открытом луче $(-\infty; \pi)$;

в) на луче $\left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right]$;

г) на открытом луче $\left(\frac{\pi}{3}; +\infty\right)$.

○**18.7.** Постройте график функции:

а) $y = \sin 2x - 1$; в) $y = \cos 2x + 3$;

б) $y = \cos\frac{x}{2} + 1$; г) $y = \sin\frac{x}{3} - 2$.

Постройте и прочитайте график функции:

○**18.8.** а) $y = \begin{cases} \cos 2x, \text{ если } x \leqslant \pi, \\ -\frac{1}{2}, \text{ если } x > \pi; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -\sin 3x, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○**18.9.** а) $y = \begin{cases} -2\sin x, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{2x}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 3\cos x - 3, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

○18.10. Составьте возможную аналитическую запись функции по её графику, изображённому:

а) на рис. 56;

б) на рис. 57;

в) на рис. 58;

г) на рис. 59.

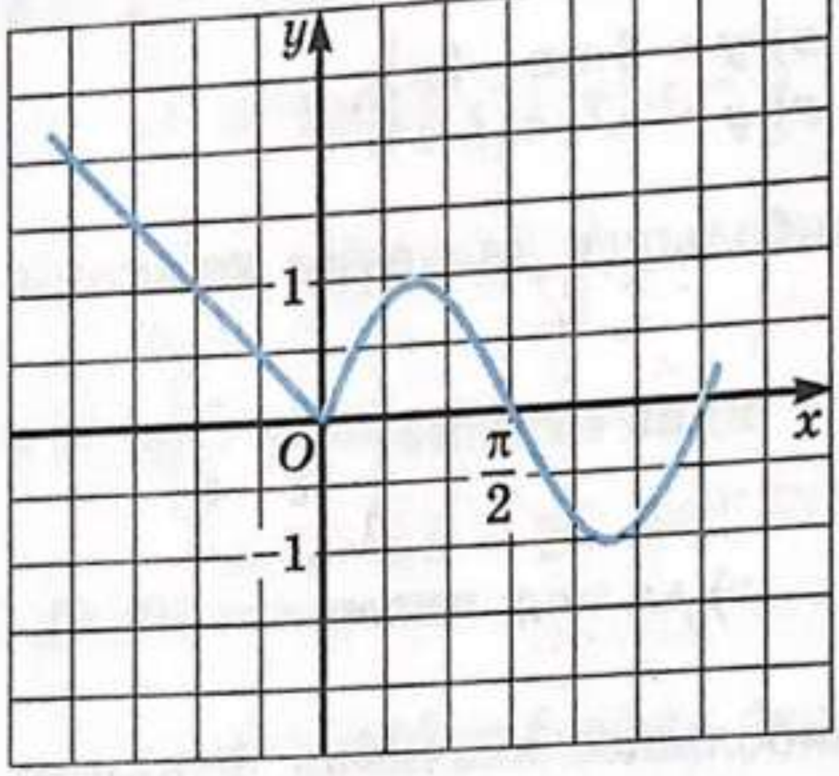


Рис. 56

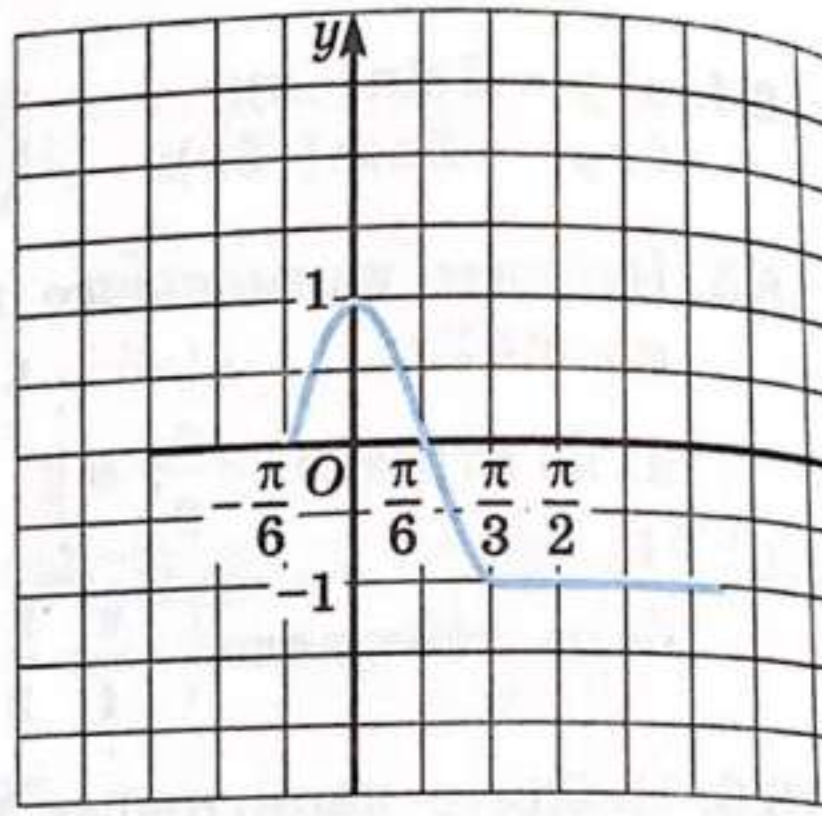


Рис. 57

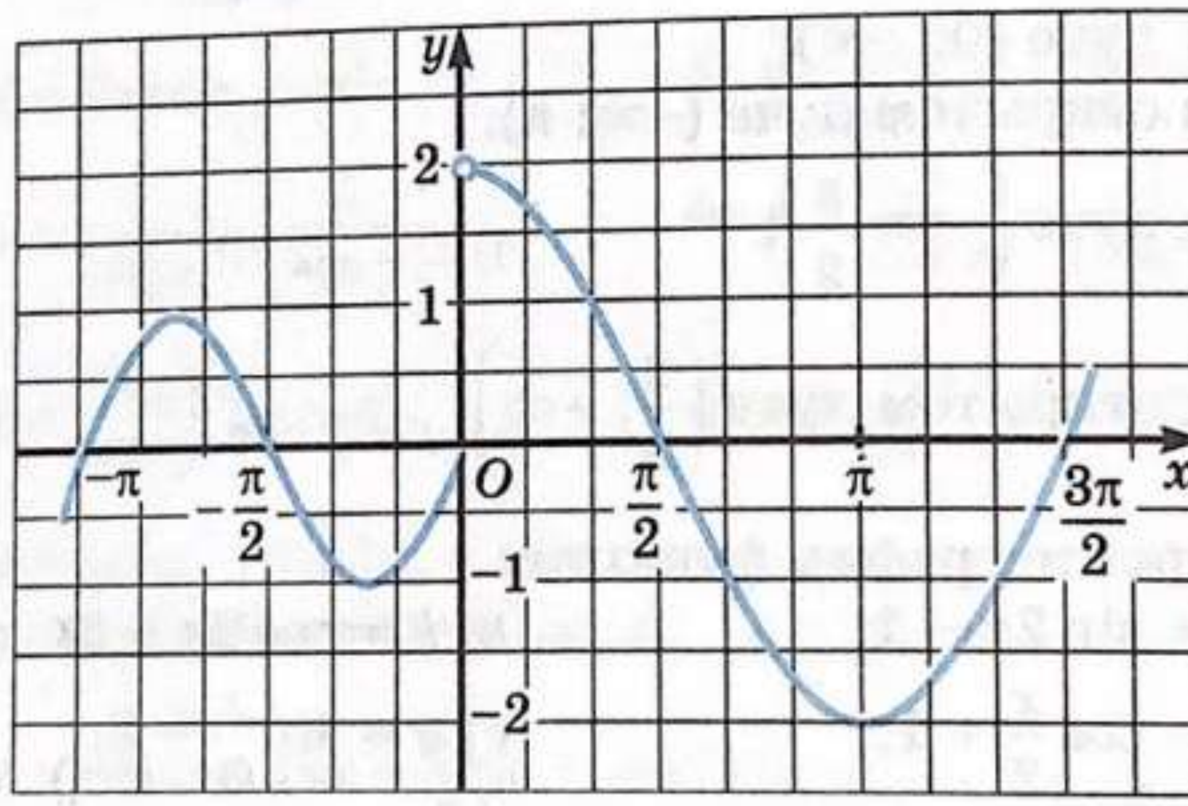


Рис. 58

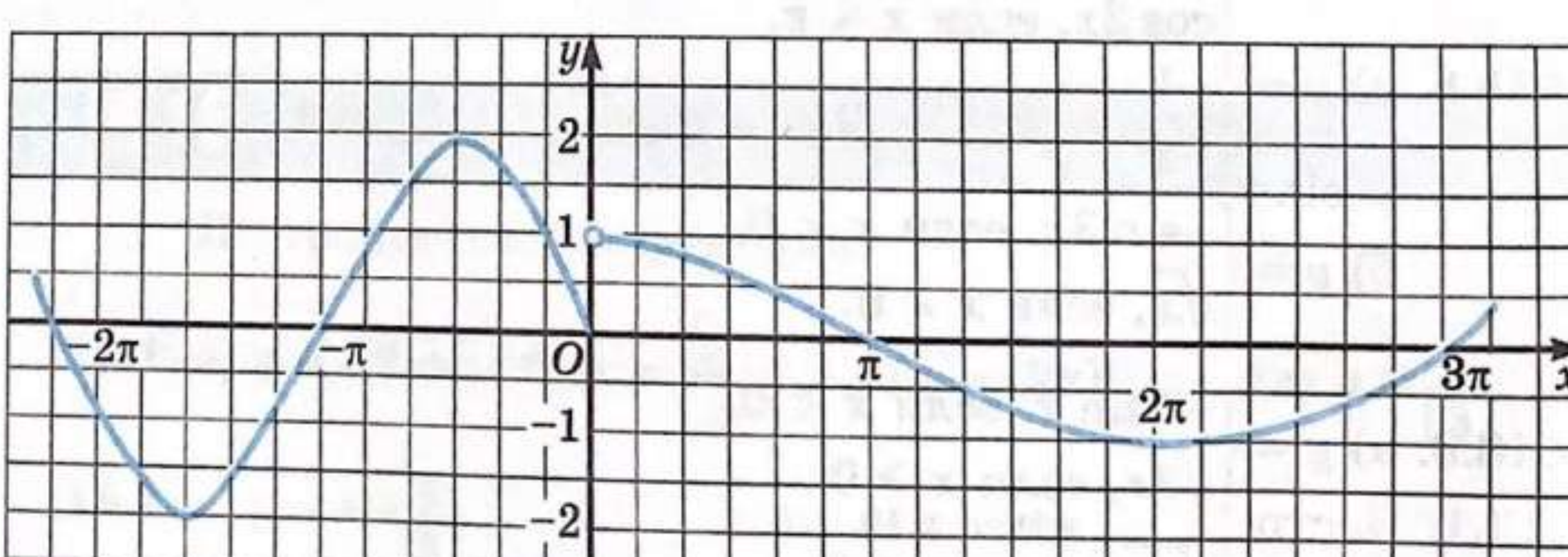


Рис. 59

18.11. Исследуйте функцию $y = 2\sin 3x$ на монотонность на заданном промежутке:

а) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $(-1; 0)$; в) $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$; г) $(3; 4)$.

18.12. Исследуйте функцию $y = -2\cos\frac{x}{2}$ на монотонность на заданном промежутке:

а) $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$; б) $(-3; 2)$; в) $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$; г) $(3; 9)$.

18.13. На каких промежутках функция $y = -0{,}5\sin\frac{2x}{3}$:

а) возрастает; б) убывает?

18.14. На каких промежутках функция $y = 1{,}5\cos\frac{3x}{2}$:

а) возрастает; б) убывает?

Постройте график функции:

18.15. а) $y = \sin \pi x$; в) $y = -2\sin\frac{2\pi x}{3}$;

б) $y = -2\cos\frac{\pi x}{2}$; г) $y = 3\cos\frac{3\pi x}{4}$.

18.16. а) $y = \frac{1}{2}\cos 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = -1{,}5\sin\frac{2}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

18.17. а) $y = \sin(x + |x|)$; в) $y = \cos(x + |x|)$;

б) $y = \cos\frac{x - 2|x|}{2}$; г) $y = \sin\frac{x + 3|x|}{2}$.

18.18. Решите уравнение:

а) $\sin \pi x = 2x - 4$; б) $\cos\frac{\pi x}{3} = \sqrt{1{,}5x}$.

§ 19 ГРАФИК ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ

19.1. Постройте график функции:

а) $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; б) $y = \cos\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Постройте график функции:

○**19.2.** а) $y = -2\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = -2\sin 3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

○**19.3.** а) $y = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$; б) $y = -3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

○**19.4.** а) $y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = -\frac{3}{2}\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

●**19.5.** Подберите коэффициенты a, b и c так, чтобы на данном рисунке был изображён график функции $y = a\sin(bx + c)$:
а) рис. 60; б) рис. 61.

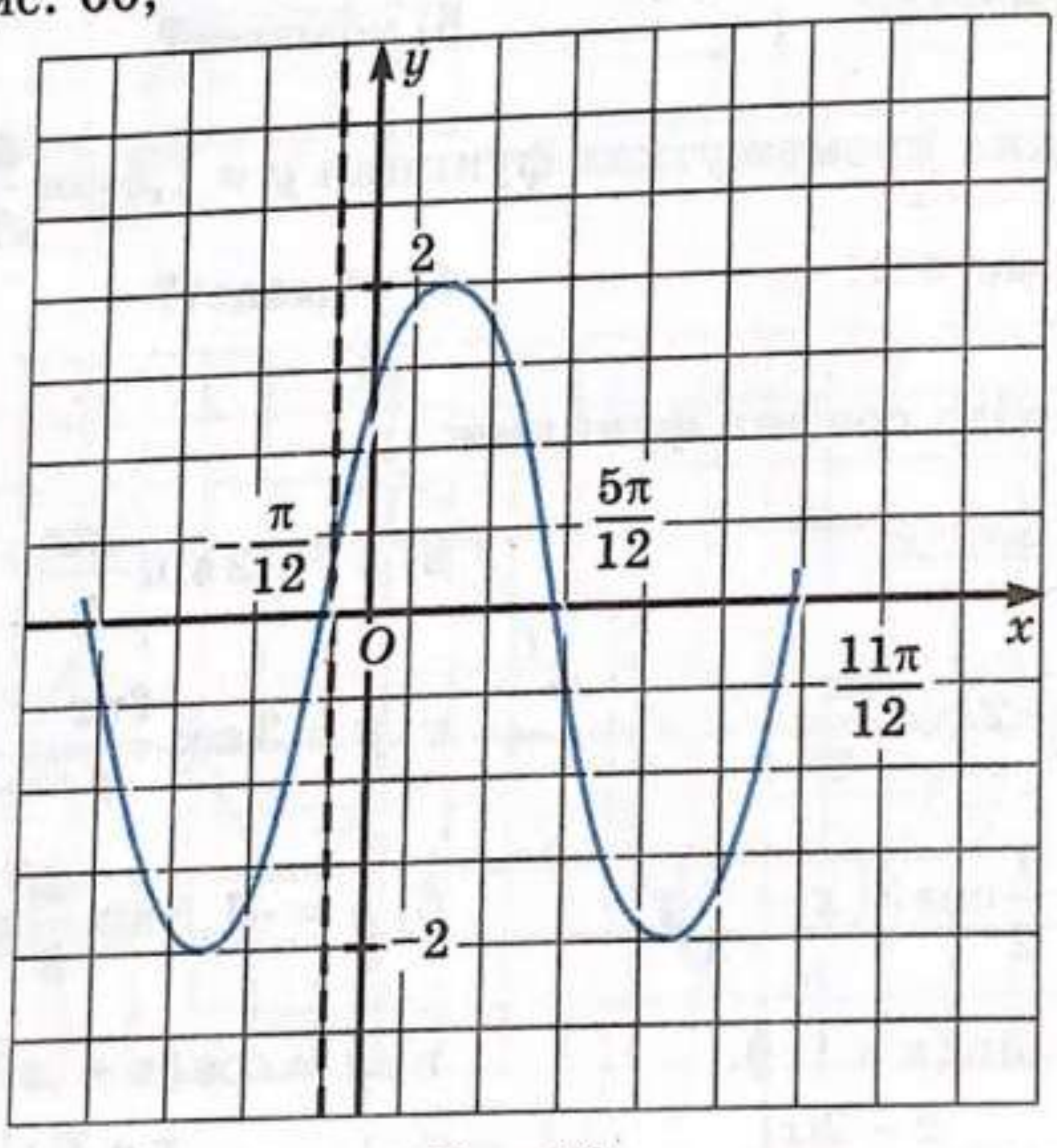


Рис. 60

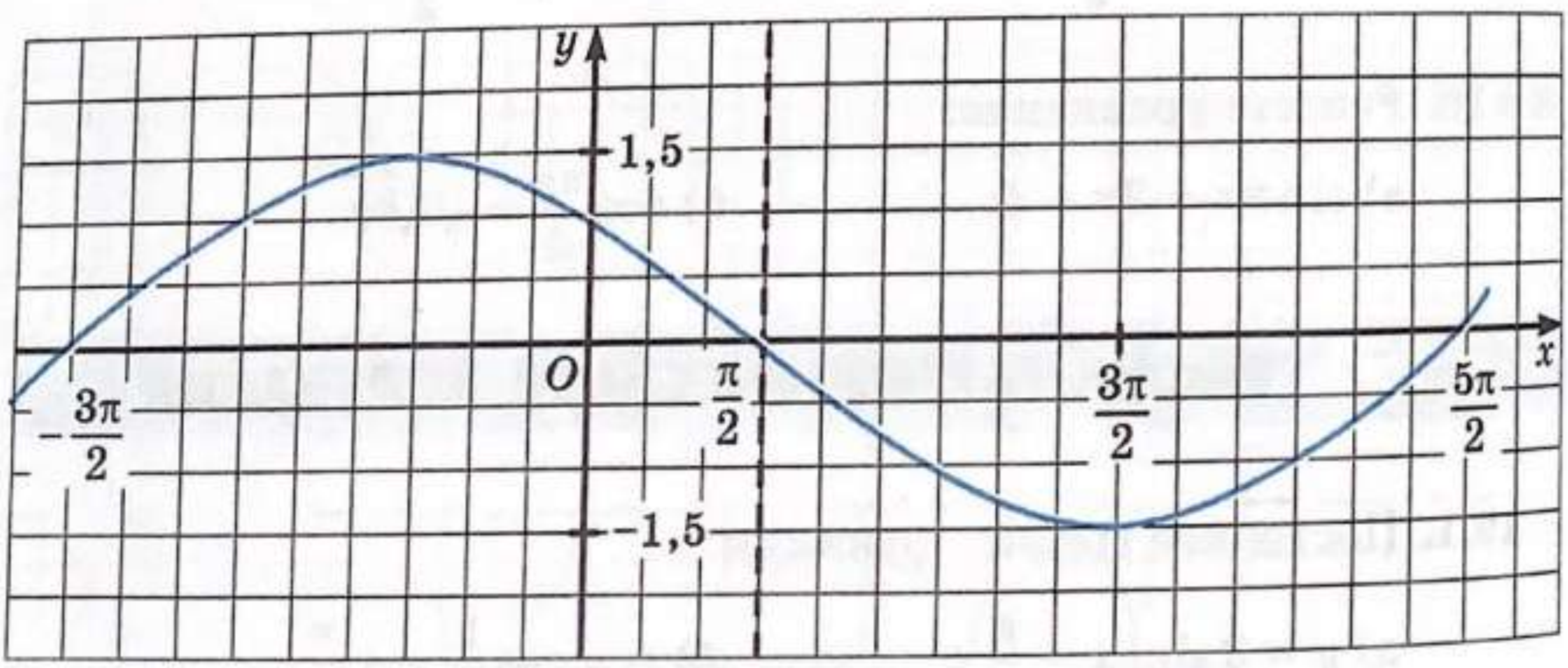


Рис. 61

19.6. Подберите коэффициенты a, b и c так, чтобы на данном рисунке был изображён график функции $y = a\cos(bx + c)$:
а) рис. 62; б) рис. 63.

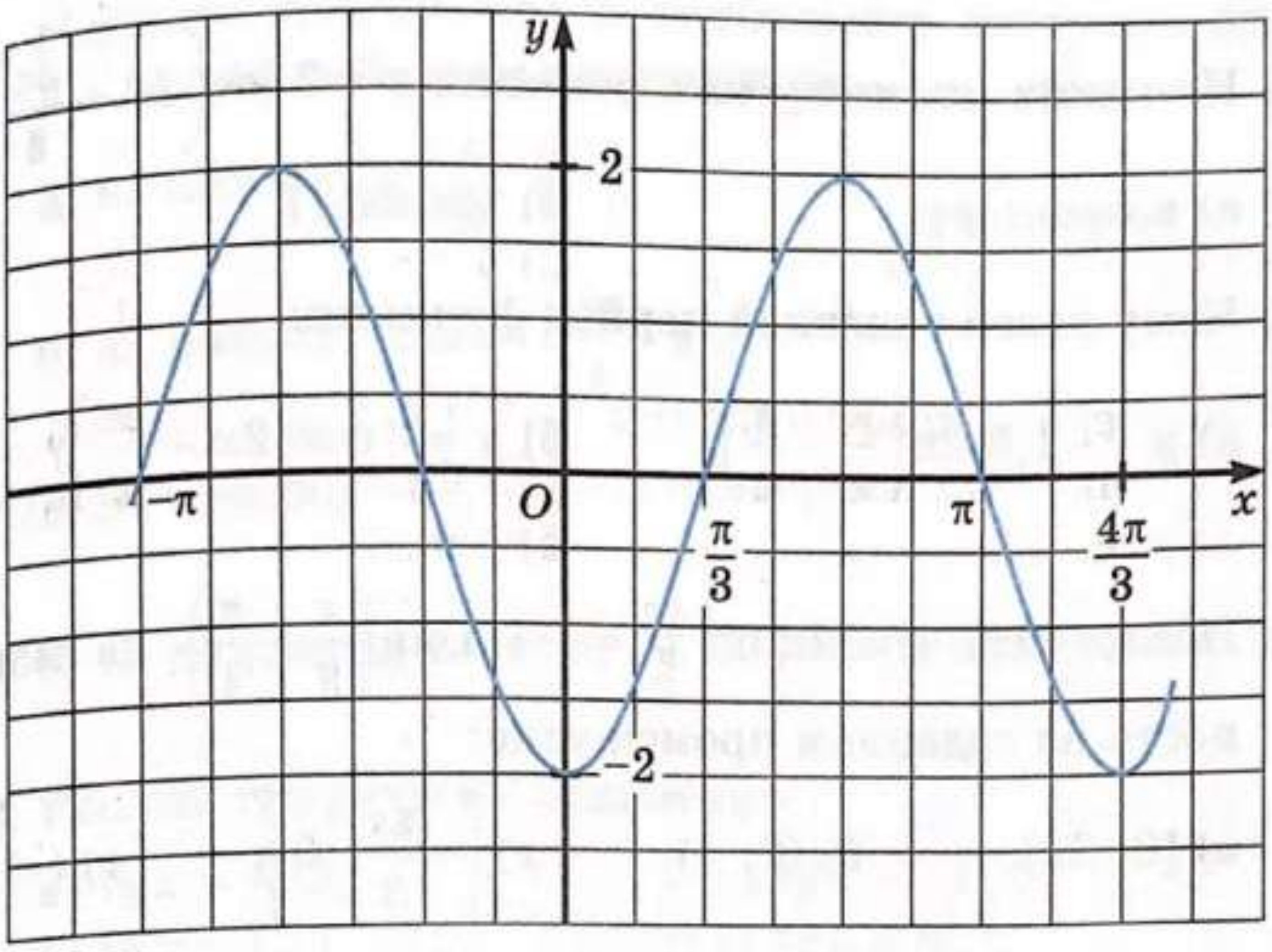


Рис. 62

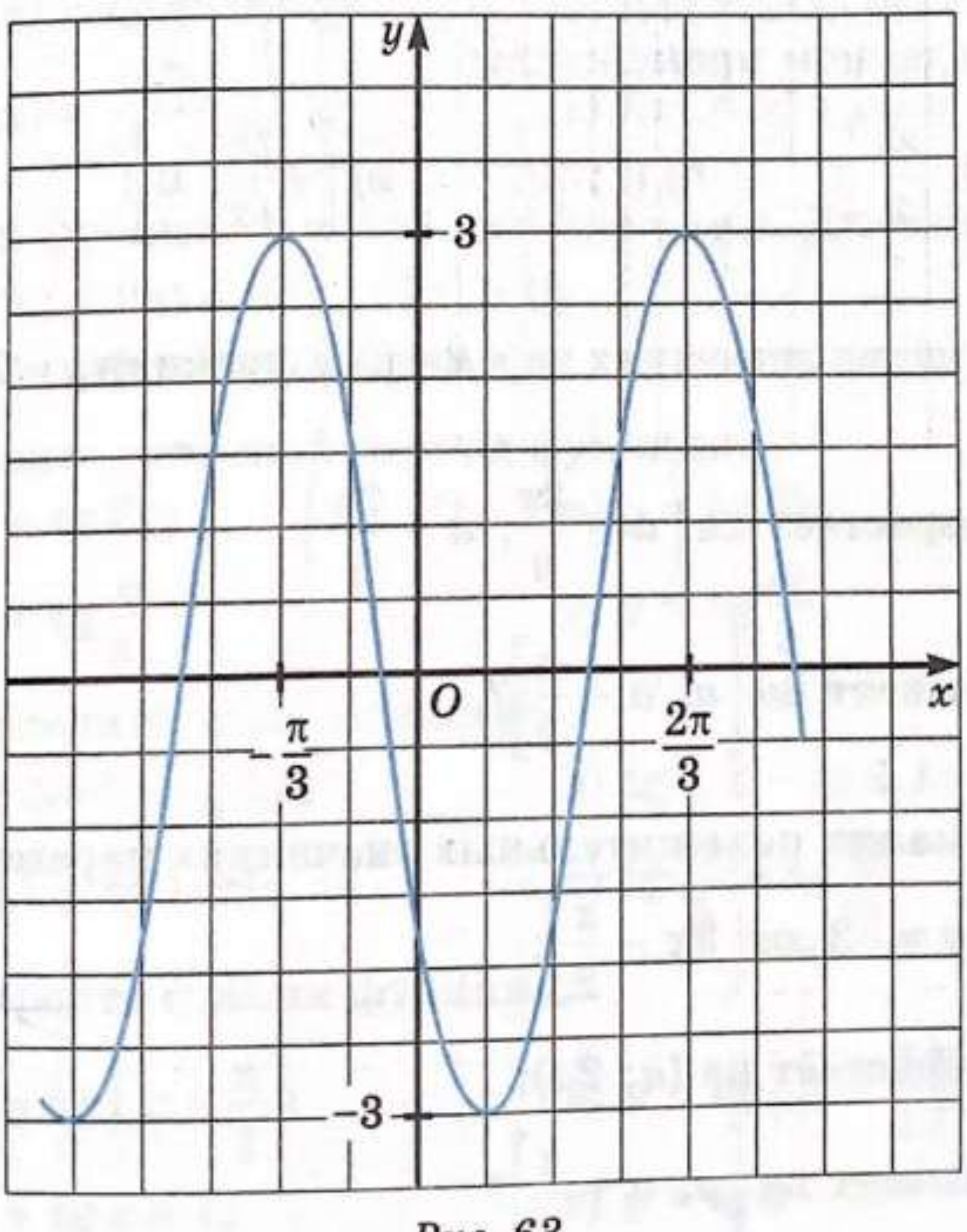


Рис. 63

○**19.7.** На каких промежутках функция $y = -1{,}5\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$:

а) возрастает; б) убывает?

○**19.8.** На каких промежутках функция $y = 3\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$:

а) возрастает; б) убывает?

○**19.9.** Чему равен основной период функции:

а) $y = -1{,}5\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = 3\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$?

○**19.10.** Исследуйте функцию $y = -1{,}5\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ на монотонность на заданном промежутке:

а) $[0;\ 2\pi]$; б) $(2;\ 4)$; в) $\left[-\frac{4\pi}{3};\ 0\right]$; г) $(-1;\ 2)$.

○**19.11.** Исследуйте функцию $y = 3\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ на монотонность на заданном промежутке:

а) $\left[0;\ \frac{2\pi}{3}\right]$; б) $(1;\ 2)$; в) $\left[-\frac{7\pi}{12};\ 0\right]$; г) $(-1;\ 1)$.

●**19.12.** При каких значениях параметра a функция $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$:

а) возрастает на $\left(a - \frac{2\pi}{3};\ a + \frac{2\pi}{3}\right)$;

б) убывает на $\left[a;\ a + \frac{\pi}{2}\right]$?

●**19.13.** При каких положительных значениях параметра a функция $y = -3\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$:

а) возрастает на $(a;\ 2a)$;

б) убывает на $\left[a;\ a + \frac{\pi}{3}\right]$?

§ 20 ФУНКЦИИ $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Прочитайте п. 1 в § 20 учебника.

156

20.1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \operatorname{tg} x$ на заданном промежутке:

а) на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

б) на полуинтервале $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$;

в) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right]$;

г) на полуинтервале $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

20.2. Решите графически уравнение:

а) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -1$;

б) $\operatorname{tg} x = 1$; г) $\operatorname{tg} x = 0$.

20.3. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на чётность, если:

а) $f(x) = \operatorname{tg} x \sin^2 x$; в) $f(x) = x^5 \operatorname{tg} x$;

б) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2 - 1}$; г) $f(x) = x^2 + \sin x + \operatorname{tg} x$.

20.4. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \operatorname{tg} x$. Докажите, что:

а) $f(2x + 2\pi) + f(7\pi - 2x) = 0$;

б) $f(\pi - x) + f(5\pi + x) = 0$.

20.5. Найдите основной период функции:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$; в) $y = \operatorname{tg} 5x$;

б) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$; г) $y = \operatorname{tg} \frac{2x}{5}$.

20.6. Определите знак разности:

а) $\operatorname{tg} 200° - \operatorname{tg} 201°$; в) $\operatorname{tg} 2{,}2 - \operatorname{tg} 2{,}1$;

б) $\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 1{,}01$; г) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} - \operatorname{tg} \frac{6\pi}{5}$.

20.7. Постройте график функции:

а) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; в) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y = \operatorname{tg} x + 1$; г) $y = \operatorname{tg} x - 2$.

Постройте график функции:

○**20.8.** а) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1;$

в) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1;$

б) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2};$

г) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2.$

○**20.9.** а) $y = -\operatorname{tg} x;$

в) $y = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right);$

б) $y = -\operatorname{tg} x + 1;$

г) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2.$

160 Прочитайте пп. 2—3 в § 20 учебника.

20.10. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \operatorname{ctg} x$ на заданном промежутке:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right];$

в) на интервале $(-\pi; 0);$

б) на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right);$

г) на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right].$

20.11. Найдите область значений заданной функции:

а) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right);$

б) $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{3}\right];$

в) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right);$

г) $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right).$

20.12. Решите графически уравнение:

а) $\operatorname{ctg} x = 1;$

в) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3};$

б) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3};$

г) $\operatorname{ctg} x = 0.$

○**20.13.** Исследуйте функцию $y = f(x)$ на чётность, если:

а) $f(x) = \operatorname{tg} x - \cos x;$

в) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x - x^4;$

б) $f(x) = \operatorname{tg} x + x;$

г) $f(x) = x^3 - \operatorname{ctg} x.$

○**20.14.** Исследуйте функцию $y = f(x)$ на чётность, если:

а) $f(x) = \sin x + \operatorname{ctg} x$;

б) $f(x) = \dfrac{2 \operatorname{ctg} x}{x^3}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^4 \operatorname{ctg} x}{x^2 - 4}$;

г) $f(x) = \operatorname{ctg} x - x \cos x$.

○**20.15.** Найдите основной период функции:

а) $y = \operatorname{tg} x + \sin 2x - \operatorname{tg} 3x - \cos 4x$;

б) $y = \sin 3x + \cos 5x + \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} 2x$.

20.16. Известно, что $\operatorname{tg}(9\pi - x) = -\dfrac{3}{4}$. Найдите: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

20.17. Известно, что $\operatorname{ctg}(7\pi - x) = \dfrac{5}{7}$. Найдите: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Постройте график функции:

○**20.18.** а) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $y = \operatorname{ctg} x + 1$;

в) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

г) $y = \operatorname{ctg} x - 2$.

○**20.19.** а) $y = 2 \operatorname{tg} x$;

б) $y = -0{,}5 \operatorname{ctg} x$;

в) $y = \operatorname{tg} 2x$;

г) $y = \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}$.

○**20.20.** Исследуйте заданную функцию на монотонность:

а) $y = 2 \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 1$;

б) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 2$;

в) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 3$;

г) $y = -2 \operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 1{,}5$.

Постройте график функции:

○**20.21.** а) $y = |\operatorname{tg} x|$;

б) $y = \operatorname{tg} |x|$;

в) $y = |\operatorname{ctg} x|$;

г) $y = \operatorname{ctg} |x|$.

○**20.22.** а) $y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x|$;

б) $y = |\operatorname{ctg} x| - \operatorname{ctg} x$.

○**20.23.** а) $y = \operatorname{tg} x\, |\operatorname{ctg} x|$;

б) $y = |\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x$.

○**20.24.** а) $y = 2 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + |x|$;

б) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \sqrt{x}$.

○**20.25.** а) $y = \sin^2(\operatorname{tg} x) + \cos^2(\operatorname{tg} x)$;

б) $y = 3\cos^2(\operatorname{ctg} x) + 3\sin^2(\operatorname{ctg} x)$.

●**20.26.** а) $y = -\operatorname{tg}(\cos x) \cdot \operatorname{ctg}(\cos x)$;

б) $y = -2 \operatorname{tg}(\sin x) \cdot \operatorname{ctg}(\sin x)$.

○**20.27.** Решите неравенство:

а) $\operatorname{tg} x \leqslant 1$;

б) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$;

в) $\operatorname{tg} x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$.

○**20.28.** Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x > 0, \\ \sin x > -\frac{1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x < 1, \\ \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \cos x < 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}, \\ \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

●**20.29.** Решите уравнение $9x^2 - 6x + 6 = \left(\sqrt{5} - \operatorname{tg} 3\pi x\right)\left(\sqrt{5} + \operatorname{tg} 3\pi x\right)$.

●**20.30.** а) Сколько целочисленных решений неравенства $\frac{4 - x}{x + 5} \geqslant 0$ удовлетворяют неравенству $1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{2} \geqslant 0$?

б) Сколько целочисленных решений неравенства $5x + 36 \geqslant x^2$ удовлетворяют неравенству $4x^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{6} > 4x$?

§ 21 ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

165 Прочитайте п. 1 в § 21 учебника.

Вычислите:

21.1. а) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arcsin 1$;

в) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\arcsin 0$.

21.2. а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

в) $\arcsin(-1)$;

г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

○**21.3.** Найдите область определения функции:

а) $y = \arcsin x$;

б) $y = \arcsin(5 - 2x)$;

в) $y = \arcsin \frac{x}{2}$;

г) $y = \arcsin(x^2 - 3)$.

21.4. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$; в) $\arcsin\left(3 - \sqrt{20}\right)$;

б) $\arcsin 1{,}5$; г) $\arcsin\left(4 - \sqrt{20}\right)$?

21.5. Найдите область значений функции:

а) $y = 2\arcsin x$; в) $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$;

б) $y = -4\arcsin x$; г) $y = \pi - 2\arcsin x$.

21.6. Исследуйте функцию на чётность:

а) $y = \frac{\arcsin x}{x^4}$;

б) $y = \sin^2 x + x\arcsin x$;

в) $y = \arcsin x^3 + 3\cos 2x$;

г) $y = 2\operatorname{tg} x + x^5 - 3\arcsin 2x$.

Постройте график функции:

21.7. а) $y = \arcsin x$; в) $y = -\arcsin x$;

б) $y = \arcsin(-x)$; г) $y = -\arcsin(-x)$.

21.8. а) $y = \arcsin(x - 1) + \frac{\pi}{2}$;

б) $y = -\arcsin(x + 2) - \frac{\pi}{3}$.

21.9. а) $y = 2\arcsin x$; в) $y = -\frac{1}{3}\arcsin x$;

б) $y = \frac{\pi}{3} - \arcsin x$; г) $y = -2\arcsin(x - 3)$.

21.10. а) $y = \arcsin 2x$; в) $y = \arcsin\frac{x}{3}$;

б) $y = \arcsin\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$; г) $y = \arcsin 2(x - 1) + \frac{\pi}{2}$.

21.11. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} \frac{\pi x}{2}, \text{ если } x < -1, \\ \arcsin x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{2}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

$$б)\ y = \begin{cases} \arcsin x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -\arcsin x, \text{ если } 0 < x \leqslant 1, \\ (x-1)^2 - \frac{\pi}{2}, \text{ если } 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

○**21.12.** Постройте график функции:

а) $y = 3|\arcsin x| - \arcsin x$;

б) $y = \arcsin x + |\arcsin x|$;

в) $y = \left|\arcsin x - \frac{\pi}{3}\right|$;

г) $y = -\arcsin|x - 2|$.

171 **Прочитайте п. 2 в § 21 учебника.**

Вычислите:

21.13. а) $\arccos 0$; в) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arccos 1$; г) $\arccos \frac{1}{2}$.

21.14. а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\arccos(-1)$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

21.15. а) $\arccos(-1) + \arccos 0$; в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\arccos\frac{1}{2} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arccos\frac{1}{2}$.

○**21.16.** а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin(-1)$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

○21.17. а) $\cos\left(2\arccos\frac{1}{2} - 3\arccos 0 - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

б) $\frac{1}{3}\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

○21.18. а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; в) $\operatorname{ctg}(\arccos 0)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

○21.19. а) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

б) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin 1 + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(3\arccos(-1) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

21.20. Докажите тождество:

а) $\sin(\arccos x + \arccos(-x)) = 0$;

б) $\cos(\arcsin x + \arcsin(-x)) = 1$.

○**21.21.** Найдите область определения функции:

а) $y = \arccos x$; в) $y = \arccos 2x$;

б) $y = \arccos(x - 1)$; г) $y = \arccos(3 - 2x)$.

21.22. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arccos\sqrt{5}$; в) $\arccos\frac{\pi}{5}$;

б) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$; г) $\arccos(-\sqrt{3})$?

○**21.23.** Найдите область значений функции:

а) $y = 2\arccos x$; в) $y = -\frac{1}{2}\arccos x$;

б) $y = 1{,}5\arccos x - \frac{\pi}{2}$; г) $y = \pi - 2\arccos x$.

○21.24. Исследуйте на чётность функцию:

а) $y = \arccos x^2 + \dfrac{\pi}{8}$;

б) $y = \dfrac{\arccos x^2}{x^3}$;

в) $y = \dfrac{x^4}{\arccos x}$;

г) $y = 2x^3 \arccos x^6$.

○21.25. Постройте график функции:

а) $y = \arccos x$;

б) $y = \arccos(-x)$;

в) $y = -\arccos x$;

г) $y = -\arccos(-x)$.

Постройте и прочитайте график функции:

○21.26. а) $y = \arccos(x - 1) - \dfrac{\pi}{2}$;

б) $y = \arccos(x + 2) + \dfrac{\pi}{3}$.

○21.27. а) $y = -3\arccos x$;

б) $y = \dfrac{3\pi}{4} - \arccos x$;

в) $y = \dfrac{1}{2}\arccos x$;

г) $y = \dfrac{2}{3}\arccos(x + 1{,}5)$.

○21.28. а) $y = \arccos 2x$;

б) $y = \arccos\dfrac{x}{2} - \dfrac{5\pi}{6}$;

в) $y = -\arccos\dfrac{x}{3}$;

г) $y = \arccos 2(x - 1) - \dfrac{\pi}{2}$.

○21.29. а) $y = \begin{cases} \pi, \text{ если } x < -1, \\ \arccos x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sqrt{x - 1}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \arccos x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 0{,}5, \\ \dfrac{\pi}{3}, \text{ если } 0{,}5 < x \leqslant \dfrac{\pi}{3}, \\ x, \text{ если } \dfrac{\pi}{3} < x \leqslant 3. \end{cases}$

●21.30. Постройте график функции:

а) $y = \left|\arccos x - \dfrac{2\pi}{3}\right|$;

б) $y = \arccos|x|$;

в) $y = -2\arccos|x|$;

г) $y = \arccos|x - 2|$.

Прочитайте пп. 3—4 в § 21 учебника.

175

Вычислите:

21.31. а) $\operatorname{arctg} 1$; в) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

б) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; г) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

21.32. а) $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

б) $\operatorname{arcctg} 1$; г) $\operatorname{arcctg} 0$.

○**21.33.** а) $\operatorname{arcctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1)$;

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

в) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

○**21.34.** а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $3\arcsin\frac{1}{2} + 4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1$;

г) $\arcsin(-1) - \frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2} + 3\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

○**21.35.** а) $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$; в) $\cos(\operatorname{arctg} 0)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$; г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-1))$.

○**21.36.** а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 1)$; в) $\cos(\operatorname{arcctg}(-1))$;

б) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

○21.37. Найдите область определения функции:

а) $y = \arcsin x + \operatorname{arctg} x$;

б) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x} + \arccos \frac{x}{2}$;

в) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \arccos(2x - 0{,}5)$;

г) $y = \arcsin(x^2 - 1) + \operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arcctg}(x - 1)$.

○21.38. Исследуйте функцию на чётность:

а) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^4}$;

б) $y = \sin^2 x + x \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \arcsin x + \operatorname{arcctg} x$;

г) $y = 2 \operatorname{arcctg} x + x^5 - 3 \arcsin 2x$.

○21.39. Найдите область значений функции:

а) $y = 2 \operatorname{arctg} x$;

б) $y = -\frac{1}{2} \operatorname{arcctg} x$;

в) $y = 1{,}5 \operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{2}$;

г) $y = \pi - 2 \operatorname{arctg} x$.

Постройте график функции:

○21.40. а) $y = \operatorname{arctg}(-x)$;
б) $y = \operatorname{arcctg}(-x)$;
в) $y = -\operatorname{arcctg} x$;
г) $y = -\operatorname{arctg}(-x)$.

○21.41. а) $y = \operatorname{arctg}(x - 1) - \frac{\pi}{2}$;

б) $y = \operatorname{arcctg}(x + 2) + \frac{\pi}{3}$.

○21.42. а) $y = 0{,}5 \operatorname{arctg} x$;

б) $y = \frac{2\pi}{3} - \operatorname{arcctg} x$;

в) $y = -\frac{1}{3} \operatorname{arcctg} x$;

г) $y = 1{,}5 \operatorname{arctg}(x + 2)$.

○21.43. а) $y = \operatorname{arctg} 3x$;

б) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$;

в) $y = \operatorname{arcctg} \frac{3x}{4}$;

г) $y = \operatorname{arcctg} 2(x - 1)$.

Постройте и прочитайте график функции:

○**21.44.** а) $y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \operatorname{arcctg} x, \text{ если } x \leqslant 1, \\ \operatorname{arctg} x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

○**21.45.** а) $y = |\operatorname{arctg} x|$;

б) $y = \operatorname{arcctg} |x|$;

в) $y = -2 \operatorname{arcctg} |x|$;

г) $y = \left|\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{6}\right|$.

Прочитайте п. 5 в § 21 учебника.

181

Вычислите:

○**21.46.** а) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$;

б) $\operatorname{tg}(\arcsin 0{,}6)$;

в) $\cos\left(\arcsin \frac{8}{17}\right)$;

г) $\operatorname{ctg}(\arcsin(-0{,}8))$.

○**21.47.** а) $\sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$;

в) $\sin(\arccos(-0{,}8))$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\arccos \frac{4}{5}\right)$.

○**21.48.** а) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right)$;

б) $\cos\left(\operatorname{arcctg} \frac{12}{5}\right)$;

в) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$;

г) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)\right)$.

●**21.49.** Докажите, что:

а) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;

б) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

в) $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$;

г) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$.

●**21.50.** Постройте график функции:

а) $y = \cos(\arccos x)$;

б) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x)$;

в) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$;

г) $y = \arcsin x + \arcsin(-x)$.

Постройте график функции:

21.51. а) $y = \arccos x + \arccos(-x)$;

б) $y = \arccos\frac{1}{x} + \arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$;

в) $y = \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x)$;

г) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x} + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{x}\right)$.

21.52. а) $y = \sin(\arccos x)$; в) $y = \cos(\arcsin x)$;

б) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$; г) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

21.53. а) $y = \arccos(\cos x)$; б) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Решите уравнение:

21.54. а) $\arcsin 2x = \frac{\pi}{3}$; в) $\arccos(3x - 3{,}5) = \frac{2\pi}{3}$;

б) $\operatorname{arctg}(4x + 1) = \frac{7\pi}{12}$; г) $\operatorname{arcctg}(4x + 1) = \frac{3\pi}{4}$.

21.55. а) $\arcsin(3x^2 - 5x + 1) = \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arctg}\left(x^3 - 27 - \sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

в) $\arccos(3x^2 - 10x + 2{,}5) = \frac{2\pi}{3}$;

г) $\operatorname{arcctg}(x^3 - 8x^2 + 15x + 1) = \frac{\pi}{4}$.

21.56. а) $\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) - \arcsin\sqrt{\frac{3}{x}} - \frac{\pi}{6} = 0$;

б) $\arccos\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{2x - 1} - \frac{7\pi}{6} = 0$.

21.57. а) $8\arcsin^2 x + 2\pi\arcsin x = \pi^2$;

б) $18\operatorname{arctg}^2 x - 3\pi\operatorname{arctg} x = \pi^2$;

в) $18\arccos^2 x = 3\pi\arccos x + \pi^2$;

г) $16\operatorname{arcctg}^2 x + 3\pi^2 = 16\pi\operatorname{arcctg} x$.

21.58. а) $\arcsin\left(2x + 3\frac{1}{3}\right) = \arcsin\left(-\frac{2x}{9}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}(x^2 - 9) = \operatorname{arctg} 8x$;

в) $\arccos(3x + 1) = \arccos(2x + 5)$;

г) $\operatorname{arcctg}(x^2 - x) = \operatorname{arcctg}(4x - 6)$.

21.59. а) $\arccos x = \operatorname{arctg} x$;
б) $\arccos x = \arcsin x$;
в) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} x$;
г) $\arcsin x = \operatorname{arcctg} x$.

Решите неравенство:

21.60. а) $\arccos x > \frac{3\pi}{4}$;
б) $\operatorname{arctg} x > -\frac{\pi}{4}$;
в) $\arcsin x < \frac{3\pi}{4}$;
г) $\operatorname{arcctg} x \leqslant \frac{5\pi}{6}$.

21.61. а) $9\arcsin^2 x \leqslant \pi^2$;
б) $36\operatorname{arctg}^2 x > \pi^2$;
в) $16\arccos^2 x > \pi^2$;
г) $9\operatorname{arcctg}^2 x \leqslant \pi^2$.

21.62. а) $8\arcsin^2 x + 2\pi\arcsin x < \pi^2$;
б) $18\operatorname{arctg}^2 x - 3\pi\operatorname{arctg} x \geqslant \pi^2$;
в) $9\arccos^2 x \leqslant 9\pi\arccos x - 2\pi^2$;
г) $16\operatorname{arcctg}^2 x + 3\pi^2 > 16\pi\operatorname{arcctg} x$.

21.63. На сколько процентов:
а) число $\arccos(\sin 45° + \cos 135°)$ больше числа $\arcsin\left(\cos\frac{7\pi}{3}\right)$;
б) число $\arccos(\sin 30° + \cos 120°)$ больше числа $\arcsin\left(\cos\frac{9\pi}{4}\right)$;
в) число $\arcsin\left(\cos\frac{9\pi}{4}\right)$ меньше числа $\arccos(\sin 30° + \cos 120°)$;
г) число $\arccos(\sin 60° + \cos 150°)$ больше числа $\arcsin\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$?

21.64. На сколько:
а) число $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 4)$ меньше числа $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(0{,}8))$;
б) число $\operatorname{tg}^2(\arccos(-0{,}25))$ больше числа $\operatorname{tg}^2(\arccos(-0{,}5))$;
в) число $\operatorname{tg}^2(\arccos 0{,}5)$ меньше числа $\operatorname{ctg}^2\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$;
г) число $\operatorname{ctg}^2(\arcsin(-0{,}2))$ больше числа $\operatorname{tg}^2\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$?

21.65. Решите уравнение:
а) $2x^3 - x + 4 = 10x^2 + 2\cos(\arccos(0{,}5x - 3))$;
б) $\sin(\arcsin(5x - 4)) = \sqrt{10x + 16}$.

4 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА

§ 22 ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

187 **Прочитайте пп. 1—2 в § 22 учебника.**

Решите уравнение:

22.1. а) $\cos x = \frac{1}{2}$; в) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

22.2. а) $\cos x = \frac{1}{3}$; в) $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$;

б) $\cos x = -1{,}1$; г) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

○**22.3.** Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0; 2\pi]$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x \in [2\pi; 4\pi]$;

в) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-\pi; 3\pi]$;

г) $\cos x = -1$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решите уравнение:

22.4. а) $\frac{8\cos x - 3}{3\cos x + 2} = 1$;

б) $\frac{3\cos x + 1}{2} + \frac{5\cos x - 1}{3} = 1{,}75$.

○**22.5.** а) $6\cos^2 x + 5\cos x + 1 = 0$;

б) $3 + 9\cos x = 5\sin^2 x$.

Прочитайте п. 3 в § 22 учебника.

192

Решите уравнение:

22.6. а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin x = 1$;

б) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin x = \frac{1}{2}$.

22.7. а) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin x = -1$;

б) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin x = -\frac{1}{2}$.

22.8. а) $\sin x = \frac{1}{4}$; в) $\sin x = -\frac{1}{7}$;

б) $\sin x = \frac{\pi}{4}$; г) $\sin x = \frac{\pi}{3}$.

○**22.9.** а) $(2\cos x + 1)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$;

б) $2\cos x - 3\sin x \cos x = 0$;

в) $4\sin^2 x - 3\sin x = 0$;

г) $2\sin^2 x - 1 = 0$.

○**22.10.** а) $6\sin^2 x + \sin x = 2$;

б) $3\cos^2 x = 7(\sin x + 1)$.

○**22.11.** а) $\sin^2 \frac{3x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin x - \cos^2 \frac{3x}{4} + 1$;

б) $\cos^2 2x - 1 - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^2 2x$.

Прочитайте п. 4 в § 22 учебника.

194

Решите уравнение:

22.12. а) $\mathrm{tg}\, x = 1$; в) $\mathrm{tg}\, x = -1$;

б) $\mathrm{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

22.13. а) $\mathrm{tg}\, x = 0$; в) $\mathrm{tg}\, x = -3$;

б) $\mathrm{tg}\, x = -2$; г) $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2}$.

Решите уравнение:

22.14. а) $\operatorname{ctg} x = 1$;

б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;

в) $\operatorname{ctg} x = 0$;

г) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

22.15. а) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$;

б) $\operatorname{ctg} x = -1$;

в) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\operatorname{ctg} x = -5$.

22.16. а) $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$;

б) $2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x = 0$;

в) $4\operatorname{tg}^2 x - 9 = 0$;

г) $3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x = 0$.

22.17. а) $\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 = 0$;

б) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

197 **Прочитайте п. 5 в § 22 учебника.**

Решите уравнение:

22.18. а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$;

в) $\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;

г) $\cos 4x = 0$.

22.19. а) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$.

○**22.20.** а) $2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 3$;

в) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$;

г) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

○**22.21.** а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$;

в) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$;

г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$.

Прочитайте п. 6 в § 22 учебника.

202

22.22. Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

а) $\cos x = \frac{1}{2}$, $x \in [1; 6]$;

б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 12\right]$;

в) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x \in [2; 10]$;

г) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[-4; \frac{5\pi}{4}\right]$.

22.23. Сколько корней имеет заданное уравнение на заданном промежутке:

а) $\cos x = \frac{1}{3}$, $x \in [1; 6]$;

б) $\cos x = -0{,}4$, $x \in [3; 11]$?

Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

22.24. а) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in [0; \pi]$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x \in [-\pi; \pi]$;

в) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-\pi; 2\pi]$;

г) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-2\pi; \pi]$.

22.25. а) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{11\pi}{4}\right)$;

б) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}; 6\right)$;

в) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in (-4; 3)$;

г) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in (-3; 6)$.

○22.26. Сколько корней имеет заданное уравнение на заданном промежутке:

а) $\sin x = 0{,}6$, $x \in \left(\frac{\pi}{4};\ 3\pi\right)$;

б) $\sin x = -\frac{2}{3}$, $x \in (2;\ 7)$?

Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

○22.27. а) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0;\ 2\pi]$;

б) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi;\ \pi]$;

в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $[-3\pi;\ 3\pi]$;

г) $\operatorname{ctg} 4x = -1$, $[0;\ \pi]$.

○22.28. а) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $[-4;\ 4]$;

б) $\cos x = 1$, $[-6;\ 16]$.

○22.29. а) $\sin\frac{x}{2} = 0$, $[-12;\ 18]$;

б) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[1;\ 7]$.

○22.30. Решите уравнение $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ и найдите:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие интервалу $\left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

○22.31. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$ и найдите:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие интервалу $\left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

○22.32. Сколько корней имеет данное уравнение на указанном промежутке:

а) $2 + \operatorname{ctg}^2 x = (\sin x)^{-2} + \cos 4x$, $x \in \left(-\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

б) $\operatorname{tg}^2 x = (\cos x)^{-2} + \sin 3x$, $x \in (-0{,}5\pi;\ 2\pi]$?

190

Разберите решение примеров 3 и 8 в § 22 учебника.

Решите неравенство:

22.33. а) $\cos t > \frac{1}{2}$;
б) $\cos t \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
г) $\cos t < \frac{1}{2}$.

○**22.34.** а) $\cos t < \frac{2}{3}$;
б) $\cos t > -\frac{1}{7}$;
в) $\cos t > \frac{2}{3}$;
г) $\cos t < -\frac{1}{7}$.

●**22.35.** а) $3\cos^2 t - 4\cos t \geqslant 4$;
б) $6\cos^2 t + 1 > 5\cos t$;
в) $3\cos^2 t - 4\cos t < 4$;
г) $6\cos^2 t + 1 \leqslant 5\cos t$.

○**22.36.** а) $4\cos^2 t < 1$;
б) $3\cos^2 t < \cos t$;
в) $9\cos^2 t > 1$;
г) $3\cos^2 t > \cos t$.

22.37. а) $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $\sin t > -\frac{1}{2}$;
в) $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
г) $\sin t \leqslant -\frac{1}{2}$.

○**22.38.** а) $\sin t < \frac{1}{3}$;
б) $\sin t \geqslant -0{,}6$;
в) $\sin t \geqslant \frac{1}{3}$;
г) $\sin t < -0{,}6$.

●**22.39.** а) $5\sin^2 t > 11\sin t + 12$;
б) $5\sin^2 t \leqslant 11\sin t + 12$.

●**22.40.** а) $6\cos^2 t + \sin t > 4$;
б) $6\cos^2 t + \sin t \leqslant 4$.

○**22.41.** а) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$;
б) $\operatorname{ctg} x > 0$;
в) $\operatorname{tg} x < 0$;
г) $\operatorname{ctg} x > -1$.

○**22.42.** а) $\operatorname{tg} x < 3$;
б) $3\operatorname{ctg} x - 1 > 0$;
в) $\operatorname{ctg} x \leqslant 2$;
г) $2\operatorname{tg} x + 1 \geqslant 0$.

○**22.43.** а) $\operatorname{tg}^2 x > 9$;
б) $\operatorname{tg}^2 x > \operatorname{tg} x$;
в) $\operatorname{tg}^2 x < 9$;
г) $\operatorname{tg}^2 x < 2\operatorname{tg} x$.

○**22.44.** а) $\sin 2x < \frac{1}{2}$;
б) $3\cos 4x < 1$;
в) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;
г) $7\sin\frac{x}{2} > -1$.

22.45. Решите неравенство:

а) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{3}$; в) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{4}$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

201 **Разберите решение примера 9 в § 22 учебника.**

Решите систему неравенств:

22.46. а) $\begin{cases} \sin x > -\frac{4}{5}, \\ \cos x > -\frac{1}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x < \frac{2}{7}, \\ \cos x < 0{,}6. \end{cases}$

22.47. а) $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 1{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x > -\frac{3}{7}, \\ \operatorname{tg} x < -0{,}1. \end{cases}$

22.48. а) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin x > -0{,}8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x < \frac{4}{9}, \\ \operatorname{ctg} x > -3. \end{cases}$

22.49. а) $\begin{cases} \sin 2x < \frac{1}{2}, \\ 25 - x^2 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ |x + 2| < 3. \end{cases}$

Решите уравнение:

22.50. а) $|x + 3|\sin x = x + 3$; б) $2|x - 6|\cos x = x - 6$.

22.51. а) $\sqrt{16 - x^2}\,\sin x = 0$;

б) $\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)\sqrt{4x^2 - 7x + 3} = 0$;

в) $\sqrt{7x - x^2}\,(2\cos x - 1) = 0$;

г) $\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0$.

22.52. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{\sin x}{2\cos x - 1}$; в) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin x}$;

б) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\pi - 3\cos x}$; г) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x - 5}}$.

Найдите область значений функции:

●22.53. а) $y = \sin x + \sqrt{-\cos^2 x}$;

б) $y = \cos x + \sqrt{-\sin^2 x}$.

●22.54. а) $y = \cos 3x + \sqrt{\cos^2 3x - 1}$;

б) $y = \sin 2x + \sqrt{\sin^2 4x - 1}$.

Решите уравнение:

●22.55. а) $|\sin x| = |\cos x|$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x = 2|\cos x|$;

в) $|\sin 2x| = |\sqrt{3}\cos 2x|$;

г) $\sqrt{2}\operatorname{tg} x + 2|\sin x| = 0$.

●22.56. а) $(2x - 3)|\sin x| = \sin x$;

б) $(3x - 7)\cos x = 5|\cos x|$.

●22.57. а) $x^2|\operatorname{tg} x| + 9\operatorname{tg} x = 0$;

б) $x^2\operatorname{ctg} x - 4|\operatorname{ctg} x| = 0$.

●22.58. а) $(2x^2 - 12x + 13)\sin x = 3|\sin x|$;

б) $(x^2 + 8x + 11)|\cos 2x| = 4\cos 2x$.

●22.59. Сколько корней имеет уравнение:

а) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{8x - x^2 - 7} = 0$;

б) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sqrt{10 - x^2 - 3x} = 0$?

Найдите область определения функции:

●22.60. а) $y = \sqrt{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$;

б) $y = \sqrt{\cos x - \frac{1}{2}} + \operatorname{ctg} 2x$;

в) $y = \operatorname{tg} 2x - \frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin x}}$;

г) $y = \frac{1}{\sin 4x} - \sqrt{\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

●22.61. а) $y = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{\sin x + \frac{1}{2}}$;

б) $y = \arccos(2x - 1) + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x}$.

Решите уравнение:

●22.62. а) $\sin^2 x + \sin^2 3x = 0$; б) $\cos^4 2x + 1 = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

●22.63. а) $\sin 4x + \cos 2x = 2$; б) $\sin 5x + \cos 3x = -2$.

При каких значениях параметра a множество корней заданного уравнения не пусто:

○22.64. а) $\sin x = 2a - 1$; б) $\cos x = 2a^2 - 5a + 1$; в) $\cos x = 3a - 2$; г) $\sin x = a^2 - 3$?

●22.65. а) $\dfrac{a\cos x}{2\cos x + a} = 5$; б) $\dfrac{a\sin x + 1}{2a - 3\sin x} = 2$?

●22.66. Решите уравнение с параметром a:

а) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{a - 1}{a + 1}$;

б) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2a - 1}{a - 2}$.

●22.67. Решите уравнение:

а) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$;

б) $\sin(2\pi\cos x) = \frac{1}{2}$.

●22.68. Решите неравенство:

а) $\sin x\sqrt{4 - x^2} \leqslant 0$; б) $\cos x\sqrt{x + 2 - x^2} \geqslant 0$.

●22.69. При каких значениях параметра a решением заданного неравенства служит любое действительное число:

а) $a\cos x - 2 < 0$; б) $(2a - 3)\sin x + 1 \geqslant 0$?

§ 23 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

206 Прочитайте п. 1 в § 23 учебника.

○23.1. Решите уравнение:

а) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$;

б) $3\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0$;

в) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$;

г) $2\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2} + 1 = 0$.

Решите уравнение:

○23.2. а) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;
б) $2\cos^2 3x - 5\cos 3x - 3 = 0$;
в) $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$;
г) $2\cos^2 \frac{x}{3} + 3\cos\frac{x}{3} - 2 = 0$.

○23.3. а) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;
б) $8\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$;
в) $5\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$;
г) $4\sin 3x + \cos^2 3x = 4$.

○23.4. а) $3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$;
б) $\mathrm{ctg}^2 2x - 6\,\mathrm{ctg}\, 2x + 5 = 0$;
в) $2\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x - 2 = 0$;
г) $7\,\mathrm{ctg}^2 \frac{x}{2} + 2\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = 5$.

○23.5. а) $\mathrm{tg}\, x - 2\,\mathrm{ctg}\, x + 1 = 0$;
б) $\frac{\mathrm{tg}\, x + 5}{2} = \frac{1}{\cos^2 x}$;
в) $2\,\mathrm{ctg}\, x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 5 = 0$;
г) $\frac{7 - \mathrm{ctg}\, x}{4} = \frac{1}{\sin^2 x}$.

○23.6. а) $\sin^2 x - \frac{12 - \sqrt{2}}{2}\sin x - 3\sqrt{2} = 0$;
б) $\cos^2 x - \frac{8 - \sqrt{3}}{2}\cos x - 2\sqrt{3} = 0$.

○23.7. а) $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x = 3$;
б) $\mathrm{ctg}^4 2x - 4\,\mathrm{ctg}^2 2x + 3 = 0$.

○23.8. Сколько корней заданного уравнения принадлежит указанному промежутку:
а) $4\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0,\ x \in [0; 3]$;
б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 3x - 3\,\mathrm{tg}\, 3x = 0,\ x \in (-1{,}5; 1{,}5)$;
в) $4\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0,\ x \in [-5{,}5; \pi]$;
г) $2\cos^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 0,\ x \in (-16; 10)$?

208 **Прочитайте п. 2 в § 23 учебника.**

Решите уравнение:

○**23.9.** а) $\left(\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\right)(\cos 2x + 1) = 0;$

б) $\left(\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{3}{4}\right)\sin\frac{x}{2} = 0.$

○**23.10.** а) $\operatorname{tg} x \sin 2x = 0;$ в) $\cos x \operatorname{tg} 3x = 0;$

б) $(1 + \cos x)\left(\frac{1}{\sin x} - 1\right) = 0;$ г) $(1 + \cos x)\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0.$

209 **Прочитайте п. 3 в § 23 учебника.**

Решите уравнение:

○**23.11.** а) $\sin x = \frac{3}{4}\cos x;$ в) $2\sin x + 5\cos x = 0;$

б) $3\sin x = 2\cos x;$ г) $\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0.$

○**23.12.** а) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0;$ в) $\sin x - 3\cos x = 0;$

б) $\sin x + \cos x = 0;$ г) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0.$

○**23.13.** а) $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0;$

б) $\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x = 0;$

в) $\sin^2 x = 3\sin x \cos x;$

г) $\sqrt{3}\cos^2 x = \sin x \cos x.$

○**23.14.** а) $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0;$

б) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0;$

в) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0;$

г) $3\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0.$

○**23.15.** а) $\sin 2x = \cos 2x;$ в) $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{3}\cos\frac{x}{2};$

б) $\sqrt{3}\sin 3x = \cos 3x;$ г) $\sqrt{2}\sin 17x = \sqrt{6}\cos 17x.$

○**23.16.** а) $2\sin^2 2x - 5\sin 2x \cos 2x + 2\cos^2 2x = 0;$

б) $3\sin^2 3x + 10\sin 3x \cos 3x + 3\cos^2 3x = 0.$

○**23.17.** а) $\sin^2\frac{x}{2} = 3\cos^2\frac{x}{2};$ б) $\sin^2 4x = \cos^2 4x.$

Прочитайте п. 4 в § 23 учебника.

213

Решите уравнение:

23.18. а) $5\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$;
б) $3\sin^2 x - \sin x\cos x = 2$;
в) $2\cos^2 x - \sin x\cos x + 5\sin^2 x = 3$;
г) $4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3$.

23.19. а) $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 5$;
б) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 4$.

23.20. а) $3\sin^2 2x - 2 = \sin 2x\cos 2x$;
б) $2\sin^2 4x - 4 = 3\sin 4x\cos 4x - 4\cos^2 4x$.

23.21. а) $4\sin^2\frac{x}{2} - 3 = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$;

б) $3\sin^2\frac{x}{3} + 4\cos^2\frac{x}{3} = 3 + \sqrt{3}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$.

23.22. а) $\sin^2 x - 5\cos x = \sin x\cos x - 5\sin x$;
б) $\cos^2 x - 7\sin x + \sin x\cos x = 7\cos x$.

23.23. а) $\sin^6 x + \sin^4 x\cos^2 x = \sin^3 x\cos^3 x + \sin x\cos^5 x$;
б) $\sin^2 x\cos^2 x - 10\sin x\cos^3 x + 21\cos^4 x = 0$.

23.24. а) $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{7}{16}$; б) $\cos^{-4}\frac{x}{2}\left(2\sin^4\frac{x}{2} - 1\right) = 2$.

Решите систему уравнений:

23.25. а) $\begin{cases} 2\sin x - 5\cos y = 7, \\ 5\sin x + \cos y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\sin 2x + 3\cos 3y = 1, \\ 8\sin 2x - 6\cos 3y = 7. \end{cases}$

23.26. а) $\begin{cases} \sin x + \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \sin x\cos y = -\frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin\frac{x}{2} - \cos 2y = 1, \\ 2\sin^2\frac{x}{2} - 3\cos 2y = 2. \end{cases}$

23.27. Решите уравнение:

а) $|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}$;

б) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{9}\operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1$.

Решите уравнение:

● **23.28.** а) $|\cos x| = 2\cos x - \sqrt{3}\,\sin x$;

б) $\sin x = \sqrt{3}\cos x + 2|\sin x|$.

○ **23.29.** а) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} = 0$;

в) $\dfrac{\cos^2 x + \cos x}{\sin x} = 0$;

б) $\operatorname{ctg} x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos x$.

● **23.30.** а) $\dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\cos^2 x - \cos x} = 0$;

б) $\dfrac{4\sin^3 2x - 3\sin 2x}{\cos 3x} = 0$.

● **23.31.** Для каждого значения a решите уравнение:

а) $\dfrac{a\sin x - 1}{\sin x + \cos x} = 0$;

б) $\dfrac{a\cos x - 1}{\sin x - \cos x} = 0$.

Решите уравнение:

● **23.32.** а) $x^2 - 2x\cos \pi x + 1 = 0$;

б) $x^2 - 2x\sin\dfrac{\pi x}{2} + 1 = 0$.

● **23.33.** а) $\cos^5 x + \sin^4 x = 1$;

б) $\cos^8 x + \sin^3 x = 1$.

● **23.34.** а) $3\sin^2\dfrac{x}{3} + 5\sin^2 x = 8$;

б) $\cos^2 2x - 2\cos^3 3x = 3$.

● **23.35.** а) $2\sin\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 5$;

б) $\sin\dfrac{x}{4} + 2\cos\dfrac{x - 2\pi}{3} = 3$.

● **23.36.** а) $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$;

б) $\sqrt{2 + 4\cos x} = 3\cos x + 0{,}5$.

● **23.37.** а) $\sqrt{3}\sin x - \sqrt{2\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x} = 0$;

б) $\cos x + \sqrt{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x} = 0$.

● **23.38.** а) $\sqrt{3\sin 5x - \cos^2 x - 3} = 1 - \sin x$;

б) $\sqrt{2\cos 4x - \sin^2 x - 2} = 1 + \cos x$.

● **23.39.** Решите неравенство:

а) $4\sin x\cos x - 1 > 2\sin x - 2\cos x$;

б) $1 + 2\sin x \geqslant 4\sin x\cos x + 2\cos x$.

Решите неравенство:

23.40. а) $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} - 1)\sin x - \sqrt{3} < 0$;

б) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} + 1)\cos x + \sqrt{3} \geqslant 0$.

23.41. а) $\sin x - \cos x > 0$;

б) $\sin x - \sqrt{3}\cos x \leqslant 0$;

в) $\sin x + \cos x < 0$;

г) $\sqrt{3}\sin x + \cos x \geqslant 0$.

23.42. а) $\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 5\cos^2 x > 0$;

б) $\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 5\cos^2 x < 0$;

в) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x \leqslant 0$;

г) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x \geqslant 0$.

Решите уравнение:

23.43. а) $|\sin x|(\cos x + 2\sin x) = 2 - 2\cos^2 x$;

б) $|\cos x|(2\cos x - 3\sin x) = 2$.

23.44. а) $\dfrac{2\cos^2 x + 5|\cos x| - 3}{2\sin x + \sqrt{3}} = 0$;

б) $\dfrac{2\sin^2 x + |\sin x| - 1}{4\cos^2 x - 3} = 0$.

23.45. $\cos^2 3x - 2\cos 2x\cos 3x + 1 = 0$.

5 ГЛАВА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 24 СИНУС И КОСИНУС СУММЫ И РАЗНОСТИ АРГУМЕНТОВ

218 Разберите решение примеров 1—2 в § 24 учебника.

24.1. Представив $105°$ как сумму $60° + 45°$, вычислите:
а) $\sin 105°$; б) $\cos 105°$.

24.2. Вычислите:
а) $\sin 15°$; в) $\sin 15° \cos 15°$;
б) $\cos 15°$; г) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$.

Упростите выражение:

24.3. а) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha\cos\beta$;
б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{2}\sin\alpha$;
в) $\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha + \beta)$;
г) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

24.4. а) $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{1}{2}\cos\alpha$;
б) $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;
в) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{3}\right)$;
г) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\alpha$.

24.5. а) $\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha\cos\beta$; в) $\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)$;
б) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$; г) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

24.6. а) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha\sin\beta}$; в) $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\sin\beta}$;
б) $\frac{\sin(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta)}$; г) $\frac{\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)}$.

24.7. Представив $2x$ в виде $x + x$, докажите тождество:
а) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$; б) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Докажите тождество:

24.8. а) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta$;
б) $\cos(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta$.

24.9. а) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$;

б) $\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$;

в) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$;

г) $\dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$.

24.10. а) $\sin 5x\cos 3x + \cos 5x\sin 3x = \sin 8x$;
б) $\cos 5x\cos 3x - \sin 5x\sin 3x = \cos 8x$;
в) $\sin 7x\cos 4x - \cos 7x\sin 4x = \sin 3x$;
г) $\cos 2x\cos 12x + \sin 2x\sin 12x = \cos 10x$.

24.11. а) $\cos(\alpha - \beta) + \sin(-\alpha)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta$;
б) $\sin(30^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ - \alpha) = -\sqrt{3}\sin\alpha$;
в) $\sin(\alpha - \beta) - \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta$;
г) $\sin(30^\circ - \alpha) + \sin(30^\circ + \alpha) = \cos\alpha$.

○**24.12.** а) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

б) $\dfrac{\cos\alpha - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)}{2\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Используя формулы сложения, выведите следующие формулы (их называют *формулами приведения*):

24.13. а) $\sin(\pi - x) = \sin x$; в) $\mathrm{tg}(2\pi - x) = -\mathrm{tg}\,x$;
б) $\cos(\pi + x) = -\cos x$; г) $\mathrm{ctg}(\pi - x) = -\mathrm{ctg}\,x$.

24.14. а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$; в) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{ctg}\,x$;

б) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$; г) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = -\mathrm{tg}\,x$.

Вычислите:

24.15. а) $\sin 74° \cos 16° + \cos 74° \sin 16°$;
б) $\cos 23° \cos 22° - \sin 23° \sin 22°$;
в) $\sin 89° \cos 1° + \cos 89° \sin 1°$;
г) $\cos 178° \cos 2° - \sin 178° \sin 2°$.

24.16. а) $\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{20} + \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{20}$;
б) $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{5\pi}{7}$;
в) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{11\pi}{12}$;
г) $\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}$.

24.17. а) $\cos 107° \cos 17° + \sin 107° \sin 17°$;
б) $\cos 36° \cos 24° - \sin 36° \sin 24°$;
в) $\sin 63° \cos 27° + \cos 63° \sin 27°$;
г) $\sin 51° \cos 21° - \cos 51° \sin 21°$.

24.18. а) $\cos \frac{5\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$;
б) $\sin \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}$;
в) $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}$;
г) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}$.

○**24.19.** Докажите равенство:

а) $\sin 75° \cos 75° = \frac{1}{4}$;
в) $\sin 105° \cos 105° = -\frac{1}{4}$;
б) $\cos^2 75° - \sin^2 75° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
г) $\cos^2 75° + \sin^2 75° = 1$.

○**24.20.** Найдите значение выражения:
а) $((1 + \cos 44° \cos 1° - \sin 44° \sin 1°)^2 - 1{,}5)^2$;
б) $((1 + \sin 57° \cos 3° + \cos 57° \sin 3°)^2 - 1{,}75)^2$;
в) $((2 + \sin 41° \cos 4° + \cos 41° \sin 4°)^2 - 4{,}5)^2$;
г) $((2 + \cos 25° \cos 5° - \sin 25° \sin 5°)^2 - 4{,}75)^2$.

Разберите решение примера 8 в § 24 учебника.

222

○24.21. Решите уравнение:

а) $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 1$;

б) $\cos 3x \cos 5x = \sin 3x \sin 5x$;

в) $\sin 6x \cos x + \cos 6x \sin x = \frac{1}{2}$;

г) $\cos 5x \cos 7x - \sin 5x \sin 7x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

○24.22. Найдите наименьший (в градусах) положительный корень уравнения:

а) $\sin x \cos 45° + \cos x \sin 45° = \cos 17° \cos 13° - \sin 17° \sin 13°$;

б) $\cos x \cos 45° + \sin x \sin 45° = \sin 200° \cos 80° - \cos 200° \sin 80°$.

○24.23. Решите уравнение:

а) $\cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x = -1$;

б) $\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \cos 3x = 0{,}5$.

○24.24. Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

а) $\sin 0{,}2x \cos 0{,}8x + \cos 0{,}2x \sin 0{,}8x = \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$, $x \in [0; 3\pi]$;

б) $\cos 0{,}7x \cos 1{,}3x - \sin 0{,}7x \sin 1{,}3x = \sin 7x \cos 9x - \sin 9x \cos 7x$, $x \in [-\pi; \pi]$.

Разберите решение примеров 6—7 в § 24 учебника.

221

Решите уравнение:

○24.25. а) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos x = 0{,}5$;

б) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

○24.26. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$;

б) $\sin x - \cos x = 1$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1$;

г) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$.

○24.27. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$;

б) $\sin x + \cos x = 1$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 1$;

г) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

220 **Разберите решение примеров 3—5 в § 24 учебника.**

○**24.28.** Зная, что $\sin t = \frac{3}{5}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, вычислите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + t\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$;

г) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right)$.

○**24.29.** Зная, что $\cos t = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, вычислите:

а) $\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)$;

в) $\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$;

г) $\sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)$.

○**24.30.** Зная, что $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha + \beta)$;

б) $\cos(\alpha + \beta)$.

○**24.31.** Зная, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha + \beta)$;

б) $\cos(\alpha + \beta)$.

○**24.32.** Зная, что $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $\sin\beta = -\frac{40}{41}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha + \beta)$;

б) $\cos(\alpha + \beta)$.

○**24.33.** Зная, что $\sin t = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, вычислите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right)$;

б) $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$;

г) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - t\right)$.

○**24.34.** Зная, что $\cos t = \frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$, вычислите:

а) $\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\sin\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$;

в) $\cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$;

г) $\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$.

24.35. Зная, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, вычислите:

а) $\sin(\alpha - \beta)$;

б) $\cos(\alpha - \beta)$.

24.36. Зная, что $\sin\beta = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -0{,}8$, $< \beta < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, вычислите:

а) $\sin(\alpha - \beta)$;

б) $\cos(\alpha - \beta)$.

Решите неравенство:

24.37. а) $\sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x > \frac{1}{2}$;

б) $\cos x \cos\frac{x}{2} + \sin x \sin\frac{x}{2} < -\frac{2}{7}$;

в) $\sin\frac{x}{4} \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{4} \sin\frac{x}{2} < \frac{1}{3}$;

г) $\sin 2x \sin 5x + \cos 2x \cos 5x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

24.38. а) $\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x > \frac{1}{2}$;

б) $\cos 2x \cos 5x - \sin 2x \sin 5x < -\frac{1}{3}$;

в) $\sin x \cos\frac{x}{2} + \cos x \sin\frac{x}{2} \leqslant -\frac{2}{7}$;

г) $\cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4} - \sin\frac{x}{2} \sin\frac{x}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

24.39. Докажите, что для любого действительного значения x справедливо неравенство:

а) $\sin(5 + x)\cos x < \cos(5 + x)\sin x$;

б) $\cos(7 - 2x)\cos 2x > \sin(7 - 2x)\sin 2x$.

24.40. а) Зная, что $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}6$ и $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{6}$, вычислите $\sin x$.

б) Зная, что $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -0{,}8$ и $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$, вычислите $\cos x$.

24.41. Определите знак числа a:

а) $a = (\cos 1 + \cos 2)^2 + (\sin 1 - \sin 2)^2 - 2$;

б) $a = (\sin 3 + \cos 4)^2 + (\cos 3 + \sin 4)^2 - 1$.

○**24.42.** Сравните числа $a = \cos x \cos 2x$ и $b = \cos 3x$, если:

а) $0 < x < \frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

○**24.43.** Сравните числа $a = \sin x \cos 2x$ и $b = \sin 3x$, если:

а) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; б) $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

●**24.44.** Сравните числа a и b, если:

а) $a = \frac{\sin 3}{\sin 4}$, $b = \frac{\cos 3}{\cos 4}$; б) $a = \frac{\sin 4}{\cos 5}$, $b = \frac{\cos 4}{\sin 5}$.

●**24.45.** а) Зная, что $\cos(x + y) = a$, $\cos(x - y) = b$, найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

б) Зная, что $\sin(x + y) = a$, $\sin(x - y) = b$, найдите $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}$.

●**24.46.** Докажите, что не существует пары $(x; y)$ такой, что:

а) $\sin x \cos y = 0{,}7$; $\cos x \sin y = 0{,}4$;

б) $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\sin x \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

●**24.47.** а) Докажите, что если $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)\sin\gamma = \cos\gamma$, то $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + \pi n$;

б) докажите, что если $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)\sin\gamma = -\cos\gamma$, то $\alpha + \beta + \gamma = \pi n$.

○**24.48.** Постройте график функции:

а) $y = \sin\frac{11x}{5}\cos\frac{x + 10\pi}{5} - \cos\frac{11x}{5}\sin\frac{x}{5}$;

б) $y = \cos\left(2x + \frac{7\pi}{12}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x + \frac{7\pi}{12}\right)\sin\left(x + \frac{9\pi}{4}\right)$.

223 **Разберите решение примера 9 в § 24 учебника.**

●**24.49.** Вычислите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \arccos\frac{3}{5}\right)$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{3}{5}\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{5}{13}\right)$.

●24.50. Вычислите:

а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + \arcsin\frac{1}{3}\right)$;

б) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Докажите равенство:

●24.51. $\arcsin\frac{4}{5} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

●24.52. $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$.

●24.53. $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

§ 25 ТАНГЕНС СУММЫ И РАЗНОСТИ АРГУМЕНТОВ

Разберите решение примеров 1—2 в § 25 учебника. 227

Вычислите:

25.1. а) $\operatorname{tg} 15°$; б) $\operatorname{tg} 75°$; в) $\operatorname{tg} 105°$; г) $\operatorname{tg} 165°$.

25.2. а) $\frac{\operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 20°}{1 - \operatorname{tg} 25° \operatorname{tg} 20°}$; в) $\frac{\operatorname{tg} 9° + \operatorname{tg} 51°}{1 - \operatorname{tg} 9° \operatorname{tg} 51°}$;

б) $\frac{1 - \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 65°}{\operatorname{tg} 70° + \operatorname{tg} 65°}$; г) $\frac{1 + \operatorname{tg} 54° \operatorname{tg} 9°}{\operatorname{tg} 54° - \operatorname{tg} 9°}$.

Упростите выражение:

25.3. а) $\frac{\operatorname{tg} 2{,}22 + \operatorname{tg} 0{,}92}{1 - \operatorname{tg} 2{,}22 \operatorname{tg} 0{,}92}$; б) $\frac{\operatorname{tg} 1{,}47 - \operatorname{tg} 0{,}69}{1 + \operatorname{tg} 1{,}47 \operatorname{tg} 0{,}69}$.

25.4. а) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}$;

б) $\frac{\operatorname{tg}(45° + \alpha) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}(45° + \alpha) \operatorname{tg}\alpha}$.

Докажите тождество:

○**25.5.** а) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4} - x\right)\operatorname{tg} x - 1$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = 2$;

г) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\alpha = 1 + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)\operatorname{tg}\alpha$.

○**25.6.** а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}(\beta - \alpha)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

○**25.7.** а) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 30^\circ - \operatorname{tg}^2 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ \operatorname{tg}^2 15^\circ} = \operatorname{tg} 15^\circ$.

25.8. Представив $2x$ в виде $x + x$, докажите тождество

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

○**25.9.** Докажите, что значение выражения $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ не зависит от значения β.

○**25.10.** Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$;

б) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{5}$.

228 Разберите решение примера 3 в § 25 учебника.

○**25.11.** Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{3}$. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

○**25.12.** а) Вычислите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = 3$;

б) вычислите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0{,}2$.

25.13. а) Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$, вычислите $\operatorname{tg}\beta$;
б) зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 2$, вычислите $\operatorname{tg}\beta$.

25.14. Известно, что $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

25.15. Известно, что $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)$.

25.16. Дано: $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. Докажите, что:

а) $\frac{1 + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha$; б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1} = \operatorname{tg}\beta$.

25.17. Решите уравнение:

а) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x} = 1$; б) $\frac{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x} = \sqrt{3}$.

25.18. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$:

а) $\frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x} = 1$; б) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\operatorname{tg} 2x + 1} = \sqrt{3}$.

25.19. Решите неравенство:

а) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\operatorname{tg} x} < 1$; б) $\frac{\operatorname{tg} 3x - 1}{\operatorname{tg} 3x + 1} > 1$.

25.20. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \operatorname{tg}(x + y) = -3, \\ 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \operatorname{tg}(x - y) = -\frac{1}{2}, \\ 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 5. \end{cases}$

25.21. Вычислите β, если известно, что $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -3$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

● **25.22.** Вычислите:

а) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \mathrm{arctg}\,\frac{2}{7}\right)$;

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \mathrm{arcctg}\,\frac{1}{3}\right)$;

б) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$;

г) $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \mathrm{arcctg}\,\frac{3}{4}\right)$.

● **25.23.** Докажите, что прямые $y = 3x + 1$ и $y = 6 - 2x$ пересекаются под углом $45°$.

● **25.24.** Точка K — середина стороны CD квадрата $ABCD$. Чему равен тангенс острого угла между диагональю AC и отрезком BK?

§ 26 ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Упростите выражение:

26.1. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$;

в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$;

б) $\cos(2\pi - t)$;

г) $\sin(\pi + t)$.

26.2. а) $\sin(\pi - t)$;

в) $\cos(2\pi + t)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$;

г) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$.

26.3. а) $\cos(90° - \alpha)$;

в) $\sin(270° + \alpha)$;

б) $\sin(360° - \alpha)$;

г) $\cos(180° + \alpha)$.

26.4. а) $\mathrm{tg}(90° - \alpha)$;

в) $\mathrm{tg}(270° + \alpha)$;

б) $\mathrm{ctg}(180° - \alpha)$;

г) $\mathrm{ctg}(360° + \alpha)$.

Вычислите с помощью формул приведения:

26.5. а) $\sin 240°$; б) $\mathrm{tg}\,300°$; в) $\cos 330°$; г) $\mathrm{ctg}\,315°$.

26.6. а) $\cos\frac{5\pi}{3}$;

в) $\sin\frac{7\pi}{6}$;

б) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$;

г) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

○ **26.7.** а) $\sin 3090°$;

в) $\cos 4650°$;

б) $\mathrm{tg}\,2205°$;

г) $\mathrm{ctg}\,4110°$.

○26.8. Вычислите с помощью формул приведения:

а) $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ$;

б) $\sin(-7\pi) + 2\cos\dfrac{31\pi}{3} - \operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}$;

в) $\operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ$;

г) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\dfrac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\dfrac{21\pi}{4}\right)$.

Упростите выражение:

○26.9. а) $\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha)$;

б) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) - \cos(\pi - t) + \operatorname{tg}(\pi - t) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2} - t\right)$.

○26.10. а) $\dfrac{\cos(180^\circ + \alpha)\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90^\circ + \alpha)}$;

в) $\dfrac{\sin(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)}{\cos(360^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)}$;

б) $\dfrac{\sin(\pi - t)\cos(2\pi - t)}{\operatorname{tg}(\pi - t)\cos(\pi - t)}$;

г) $\dfrac{\sin(\pi + t)\sin(2\pi + t)}{\operatorname{tg}(\pi + t)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + t\right)}$.

○26.11. а) $\dfrac{\cos(\pi - t) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)}{\sin(2\pi - t) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - t\right)}$;

б) $\dfrac{\sin^2(\pi - t) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)}{\sin(\pi - t)} \cdot \operatorname{tg}(\pi - t)$.

○26.12. а) $\dfrac{\sin^3(\alpha - 270^\circ)\cos(360^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}^3(\alpha - 90^\circ)\cos^3(\alpha - 270^\circ)}$;

б) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + y\right)}{\cos(\pi - x)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - y\right)} - \dfrac{\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - y\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2} + x\right)}{\cos(2\pi - y)\operatorname{tg}(11\pi - x)}$.

○26.13. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi - t)}{\cos(\pi + t)} \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + t\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + t\right)} = \operatorname{tg}^2 t$;

б) $\dfrac{\sin(\pi - t)}{\operatorname{tg}(\pi + t)} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right)} \cdot \dfrac{\cos(2\pi - t)}{\sin(-t)} = \sin t;$

в) $\dfrac{\cos^2(\pi - t) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) + \cos(\pi + t)\cos(2\pi - t)}{\operatorname{tg}^2\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + t\right)} = \cos^2 t;$

г) $\dfrac{\sin^2\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi - t)}{\operatorname{tg}^2\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = \cos t.$

Вычислите:

○**26.14.** а) $\dfrac{11\cos 287^\circ - 25\sin 557^\circ}{\sin 17^\circ};$

б) $\dfrac{13\sin 469^\circ - 8\cos 341^\circ}{\cos 19^\circ}.$

○**26.15.** а) $\dfrac{2\cos\dfrac{11\pi}{5} + 8\sin\dfrac{13\pi}{10}}{\cos\dfrac{\pi}{5}};$ б) $\dfrac{5\sin\dfrac{5\pi}{7} + 2\cos\dfrac{25\pi}{14}}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}.$

○**26.16.** а) $\sin 77^\circ \cos 17^\circ - \sin 13^\circ \cos 73^\circ;$
б) $\cos 125^\circ \cos 5^\circ + \sin 55^\circ \cos 85^\circ.$

○**26.17.** а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + t\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - t\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + t\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - t\right);$

б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + t\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{12} - t\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right)\cos\left(\dfrac{5\pi}{12} + t\right).$

○**26.18.** а) $\dfrac{\cos 105^\circ \cos 5^\circ + \sin 105^\circ \cos 85^\circ}{\sin 195^\circ \cos 5^\circ + \cos 195^\circ \sin 185^\circ};$

б) $\dfrac{\sin 75^\circ \cos 5^\circ - \cos 75^\circ \cos 85^\circ}{\cos 375^\circ \cos 5^\circ - \sin 15^\circ \sin 365^\circ}.$

○**26.19.** а) $\dfrac{\operatorname{tg} 380^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 225^\circ + \operatorname{ctg} 290^\circ \operatorname{ctg} 65^\circ};$ б) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{19\pi}{36} - \operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{36}}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{3} - \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{36}\operatorname{ctg}\dfrac{11\pi}{36}}.$

○**26.20.** Известно, что $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = 0{,}4$, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + y\right) = -3.$
Вычислите: а) $\operatorname{tg}(x + y);$ б) $\operatorname{ctg}(x - y).$

Решите уравнение:

○26.21. а) $2\cos(2\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 3;$

б) $\sin(\pi + x) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 3;$

в) $2\sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{2};$

г) $3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(2\pi + x) = 1.$

○26.22. а) $5\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 8\cos(2\pi - x) = 1;$

б) $\sin(2\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x) = 1.$

○26.23. а) $\sin^2(\pi + x) + \cos^2(2\pi - x) = 0;$
б) $\sin^2(\pi + x) + \cos^2(2\pi - x) = 1.$

○26.24. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0;$

б) $2\sin(\pi - 3x) + \cos(2\pi - 3x) = 0.$

○26.25. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) - 3\cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 0;$

б) $\sqrt{3}\sin\left(\pi - \frac{x}{3}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) = 0.$

○26.26. а) $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2\cos^2 x = 0;$

б) $\sin^2 3x + 3\cos^2 3x - 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 0;$

в) $\sin^2 x + 2\sin(\pi - x)\cos x - 3\cos^2(2\pi - x) = 0;$

г) $\sin^2(2\pi - 3x) + 5\sin(\pi - 3x)\cos 3x + 4\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) = 0.$

○26.27. а) $3\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 2;$

б) $2\cos^2\frac{x}{2} - 3\sin\left(\pi - \frac{x}{2}\right)\cos\left(2\pi - \frac{x}{2}\right) + 7\sin^2\frac{x}{2} = 3;$

в) $4\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\sin(\pi + x) +$
$+ 3\cos^2(\pi + x) = 3;$

г) $3\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(\pi + x) +$
$+ 2\sin^2(x - \pi) = 2.$

○**26.28.** а) $2\sin^2(\pi + x) - 5\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0;$

б) $2\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 4 = 0;$

в) $2\cos^2 x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = 0;$

г) $5 - 5\sin 3(\pi - x) = \cos^2(\pi - 3x).$

○**26.29.** а) $2\,\mathrm{tg}^2\,2x + 3\,\mathrm{tg}(\pi + 2x) = 0;$

б) $\mathrm{tg}^2\,3x - 6\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0.$

○**26.30.** а) $3\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 2\,\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) - 1 = 0;$

б) $\mathrm{tg}(\pi + x) + 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0;$

в) $3\,\mathrm{tg}^2\,4x - 2\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 1;$

г) $2\,\mathrm{ctg}\,x - 3\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 5 = 0.$

○**26.31.** а) $\sin^2 x + \cos^2 2x + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) + 2\cos x\,\mathrm{tg}\,x = 1;$

б) $2\cos^2 x - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

○**26.32.** Постройте график функции:

а) $y = \sin(3\pi + 3x)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)\sin(4\pi - x) +$
$+ \sin\frac{99\pi}{2};$

б) $y = \cos(\pi + x)\cos\left(3\pi - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos\frac{3\pi + x}{2} +$
$+ \cos\frac{16\pi}{3}.$

26.33. Докажите равенство:

а) $\dfrac{\sin 50^\circ + \cos 50^\circ}{\sqrt{2}\sin 85^\circ} = 1;$ б) $\dfrac{\cos 40^\circ - \sqrt{3}\sin 40^\circ}{\sin 190^\circ} = 2.$

Разберите решение примера 3 в § 26 учебника.

234

26.34. Докажите, что:

а) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},\ x \in [-1; 1];$

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2},\ x \in \boldsymbol{R}.$

Вычислите:

26.35. а) $\arcsin\left(\sin\dfrac{2\pi}{5}\right);$ в) $\arcsin\left(\sin\left(-\dfrac{2\pi}{5}\right)\right);$

б) $\arccos\left(\sin\dfrac{2\pi}{5}\right);$ г) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{5}\right)\right).$

26.36. а) $\arcsin\left(-\cos\dfrac{4\pi}{5}\right);$ в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{21\pi}{5}\right)\right);$

б) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{24\pi}{5}\right)\right);$ г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{27\pi}{7}\right)\right).$

26.37. Постройте график функции:

а) $y = \arcsin(\sin x);$ б) $y = \arcsin(\cos x).$

§ 27 ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА. ФОРМУЛЫ ПОНИЖЕНИЯ СТЕПЕНИ

Упростите выражение:

27.1. а) $\dfrac{\sin 2t}{\cos t} - \sin t;$ в) $\cos^2 t - \cos 2t;$

б) $\dfrac{\sin 6t}{\cos^2 3t};$ г) $\dfrac{\cos 2t}{\cos t - \sin t} - \sin t.$

27.2. а) $\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ};$ в) $\dfrac{\sin 100^\circ}{2\cos 50^\circ};$

б) $\dfrac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ};$ г) $\dfrac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}.$

Вычислите:

27.3. а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$;
б) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$;
в) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;
г) $(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2$.

27.4. а) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$;
б) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$;
в) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;
г) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

27.5. а) $\dfrac{\operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}$;
б) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{12} - 1}$.

27.6. а) $\dfrac{\sin 2t - 2\sin t}{\cos t - 1}$;
б) $\dfrac{\cos 2t - \cos^2 t}{1 - \cos^2 t}$;
в) $\sin 2t \operatorname{ctg} t - 1$;
г) $2\cos^2\frac{\pi + t}{4} - 2\sin^2\frac{\pi + t}{4}$.

27.7. а) $\dfrac{2}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t}$;
б) $\dfrac{2}{\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t}$;
в) $(1 - \operatorname{tg}^2 t)\cos^2 t$;
г) $(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)\sin 2t$.

Докажите тождество:

27.8. а) $(\sin t - \cos t)^2 = 1 - \sin 2t$;
б) $\cos^4 t - \sin^4 t = \cos 2t$;
в) $(\sin t + \cos t)^2 = 1 + \sin 2t$;
г) $\cos^4 t - \sin^4 t = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t$.

27.9. а) $\sin^2 2t = \dfrac{1 - \cos 4t}{2}$;
б) $2\sin^2\frac{t}{2} + \cos t = 1$;
в) $2\sin^2 2t = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 4t\right)$;
г) $2\cos^2 t - \cos 2t = 1$.

○**27.10.** а) $\cos^2 3t = \dfrac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6t\right)}{2}$;
б) $\dfrac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}$;
в) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{4} + 2t\right) = \dfrac{1 - \sin 4t}{2}$;
г) $\dfrac{1 - \cos t}{\sin t} = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

○**27.11.** а) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$;
б) $2\sin^2(45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha = 1$;
в) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$;
г) $2\cos^2(45^\circ + \alpha) + \sin 2\alpha = 1$.

○27.12. а) $\dfrac{\cos 2t}{\sin t \cos t + \sin^2 t} = \operatorname{ctg}(\pi + t) - 1;$

б) $\dfrac{\sin 2t - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) - \sin^2 t} = -2\operatorname{ctg} t;$

в) $(\operatorname{ctg} t - \operatorname{tg} t)\sin 2t = 2\cos 2t;$

г) $\dfrac{1 - \cos 2t + \sin 2t}{1 + \cos 2t + \sin 2t} \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = 1.$

○27.13. а) $\dfrac{\sin 2t}{1 + \cos 2t} \cdot \dfrac{\cos t}{1 + \cos t} = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2};$

б) $\dfrac{\sin 2t}{1 + \cos 2t} \cdot \dfrac{\cos t}{1 + \cos t} \cdot \dfrac{\cos\dfrac{t}{2}}{1 + \cos\dfrac{t}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{t}{4}.$

○27.14. а) $\dfrac{1 - \cos 2t + \sin 2t}{1 + \sin 2t + \cos 2t} = \operatorname{tg} t;$

б) $\dfrac{1 + \cos 2t - \sin 2t}{1 + \sin 2t + \cos 2t} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right).$

○27.15. а) $\cos^2 t - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2t\right);$

б) $\sin^2 t - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right).$

○27.16. а) $\cos x \cos 2x = \dfrac{\sin 4x}{4\sin x};$

б) $\cos x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{\sin 8x}{8\sin x};$

в) $\sin x \cos 2x = \dfrac{\sin 4x}{4\cos x};$

г) $\sin x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{\sin 8x}{8\cos x}.$

○27.17. Проверьте числовое равенство:

а) $\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ = \dfrac{1}{4}\sin 72^\circ;$

б) $\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \dfrac{1}{4}.$

○**27.18.** Упростите выражение $\sqrt{1-\cos 2t}+\sqrt{1+\cos 2t}$, если:

а) $t \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$;

б) $t \in \left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$;

в) $t \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $t \in \left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

27.19. Вычислите (с помощью формул понижения степени):

а) $\sin 22{,}5°$; б) $\cos 22{,}5°$; в) $\sin\frac{3\pi}{8}$; г) $\cos\frac{3\pi}{8}$.

Вычислите:

○**27.20.** а) $\sin 11°15' \cos 11°15' \cos 22°30' \cos 45°$;

б) $\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}$.

○**27.21.** а) $\frac{1+\cos 40°+\cos 80°}{\sin 80°+\sin 40°}\cdot \operatorname{tg} 40°$;

б) $\frac{1-\cos 25°+\cos 50°}{\sin 50°-\sin 25°}-\operatorname{tg} 65°$.

○**27.22.** а) $\frac{\sin 125°}{\sin 55°}-\frac{\cos 125°}{\cos 55°}$; б) $\frac{\cos 150°}{\sin 40°}-\frac{\sin 150°}{\cos 40°}$.

●**27.23.** а) $\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^3\frac{\pi}{8}-\sin^3\frac{\pi}{8}\right)$;

б) $\sin\frac{7\pi}{8}\left(\cos^4\frac{7\pi}{16}-\sin^4\frac{7\pi}{16}\right)$;

в) $\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos^3\frac{\pi}{12}+\sin^3\frac{\pi}{12}\right)$;

г) $\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos^6\frac{\pi}{24}-\sin^6\frac{\pi}{24}\right)$.

●**27.24.** а) $\sin^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^6\frac{3\pi}{8}+\cos^6\frac{3\pi}{8}$;

б) $\cos^2\frac{5\pi}{8}-\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}-\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^6\frac{5\pi}{8}-\sin^6\frac{5\pi}{8}$.

●**27.25.** а) $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$;

б) $\cos\frac{\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}$.

●27.26. Докажите равенство:

а) $8\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \operatorname{ctg} 10^\circ$;

б) $\sin 70^\circ + 8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2\cos^2 10^\circ$.

Разберите решение примеров 5 и 8 в § 27 учебника.

238

○27.27. Известно, что $\sin t = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Вычислите:

а) $\sin 2t$; б) $\cos 2t$; в) $\operatorname{tg} 2t$; г) $\operatorname{ctg} 2t$.

○27.28. Известно, что $\cos x = 0{,}8$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Вычислите:

а) $\sin 2x$; б) $\cos 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$; г) $\operatorname{ctg} 2x$.

○27.29. Известно, что $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, $180^\circ < x < 270^\circ$. Вычислите:

а) $\sin 2x$; б) $\cos 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$; г) $\operatorname{ctg} 2x$.

○27.30. а) Известно, что $\cos t = \frac{3}{4}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Вычислите: $\cos\frac{t}{2}$, $\sin\frac{t}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

б) Известно, что $\operatorname{ctg} t = \frac{3}{4}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Вычислите: $\cos\frac{t}{2}$, $\sin\frac{t}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

○27.31. а) Известно, что $\sin 2x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Вычислите: $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

б) Известно, что $\operatorname{tg} 2x = \frac{3}{4}$, $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$. Вычислите: $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

○27.32. а) Зная, что $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = a$, найдите $\sin\frac{2x - \pi}{2}$, $\cos\frac{2x + \pi}{2}$;

б) зная, что $\operatorname{tg}\frac{x}{4} = a$, найдите $\sin\frac{x - 3\pi}{2}$, $\cos\frac{x + 3\pi}{2}$.

●27.33. а) Зная, что $\cos 4x = -\frac{527}{625}$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, вычислите $\sin x$;

б) зная, что $\cos 4x = \frac{17}{81}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, вычислите $\operatorname{tg} x$.

○27.34. Вычислите $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, если:

а) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = a$; б) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = a$.

○**27.18.** Упростите выражение $\sqrt{1-\cos 2t}+\sqrt{1+\cos 2t}$, если:

а) $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;

б) $t \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$;

в) $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $t \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

27.19. Вычислите (с помощью формул понижения степени):

а) $\sin 22{,}5°$; б) $\cos 22{,}5°$; в) $\sin\frac{3\pi}{8}$; г) $\cos\frac{3\pi}{8}$.

Вычислите:

○**27.20.** а) $\sin 11°15' \cos 11°15' \cos 22°30' \cos 45°$;

б) $\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}$.

○**27.21.** а) $\frac{1+\cos 40°+\cos 80°}{\sin 80°+\sin 40°}\cdot \operatorname{tg} 40°$;

б) $\frac{1-\cos 25°+\cos 50°}{\sin 50°-\sin 25°}-\operatorname{tg} 65°$.

○**27.22.** а) $\frac{\sin 125°}{\sin 55°}-\frac{\cos 125°}{\cos 55°}$; б) $\frac{\cos 150°}{\sin 40°}-\frac{\sin 150°}{\cos 40°}$.

●**27.23.** а) $\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^3\frac{\pi}{8}-\sin^3\frac{\pi}{8}\right)$;

б) $\sin\frac{7\pi}{8}\left(\cos^4\frac{7\pi}{16}-\sin^4\frac{7\pi}{16}\right)$;

в) $\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos^3\frac{\pi}{12}+\sin^3\frac{\pi}{12}\right)$;

г) $\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos^6\frac{\pi}{24}-\sin^6\frac{\pi}{24}\right)$.

●**27.24.** а) $\sin^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^6\frac{3\pi}{8}+\cos^6\frac{3\pi}{8}$;

б) $\cos^2\frac{5\pi}{8}-\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}-\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^6\frac{5\pi}{8}-\sin^6\frac{5\pi}{8}$.

●**27.25.** а) $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$;

б) $\cos\frac{\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}$.

●27.26. Докажите равенство:

а) $8\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \operatorname{ctg} 10^\circ$;

б) $\sin 70^\circ + 8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2\cos^2 10^\circ$.

Разберите решение примеров 5 и 8 в § 27 учебника.

238

○27.27. Известно, что $\sin t = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Вычислите:

а) $\sin 2t$; б) $\cos 2t$; в) $\operatorname{tg} 2t$; г) $\operatorname{ctg} 2t$.

○27.28. Известно, что $\cos x = 0{,}8$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Вычислите:

а) $\sin 2x$; б) $\cos 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$; г) $\operatorname{ctg} 2x$.

○27.29. Известно, что $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, $180^\circ < x < 270^\circ$. Вычислите:

а) $\sin 2x$; б) $\cos 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$; г) $\operatorname{ctg} 2x$.

○27.30. а) Известно, что $\cos t = \frac{3}{4}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Вычислите: $\cos\frac{t}{2}$, $\sin\frac{t}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

б) Известно, что $\operatorname{ctg} t = \frac{3}{4}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Вычислите: $\cos\frac{t}{2}$, $\sin\frac{t}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

○27.31. а) Известно, что $\sin 2x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Вычислите: $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

б) Известно, что $\operatorname{tg} 2x = \frac{3}{4}$, $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$. Вычислите: $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

○27.32. а) Зная, что $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = a$, найдите $\sin\frac{2x-\pi}{2}$, $\cos\frac{2x+\pi}{2}$;

б) зная, что $\operatorname{tg}\frac{x}{4} = a$, найдите $\sin\frac{x-3\pi}{2}$, $\cos\frac{x+3\pi}{2}$.

●27.33. а) Зная, что $\cos 4x = -\frac{527}{625}$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, вычислите $\sin x$;

б) зная, что $\cos 4x = \frac{17}{81}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, вычислите $\operatorname{tg} x$.

○27.34. Вычислите $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, если:

а) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = a$; б) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = a$.

○**27.35.** а) Известно, что $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$. Вычислите $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

б) Известно, что $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{49}{50}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислите $\sin 2\alpha$.

○**27.36.** Известно, что $\cos 2x = \frac{5}{13}$. Вычислите:

а) $\sin^4 x + \cos^4 x$; б) $\sin^8 x - \cos^8 x$.

○**27.37.** Сравните числа a и b, если:

а) $a = \sin\frac{\pi}{12}$, $b = \frac{1}{4}$; б) $a = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, $b = \frac{1}{2}$.

○**27.38.** Выразите:

а) $\sin 3x$ через $\sin x$; б) $\cos 3x$ через $\cos x$.

○**27.39.** Опираясь на результаты 27.38, сформулируйте необходимое и достаточное условие для выполнения равенства:

а) $\sin 3x = 3\sin x$; б) $\cos 3x + 3\cos x = 0$.

○**27.40.** а) Зная, что $f(x) = \sin x$, $f(a) = 0{,}1$, вычислите $f(3a)$;

б) зная, что $f(x) = \sin x$, $f(a) = 0{,}25$, вычислите $f(4a)$;

в) зная, что $f(x) = \cos x$, $f(a) = -0{,}1$, вычислите $f(3a)$;

г) зная, что $f(x) = \cos x$, $f(a) = \frac{2}{3}$, вычислите $f(4a)$.

●**27.41.** а) Зная, что $15\cos 2t + 8\sin t = 9$ и $1 < t < 3$, вычислите $\operatorname{tg} t$;

б) зная, что $6\cos 2t + 5\cos t + 3 = 0$ и $4 < t < 6$, вычислите $\operatorname{ctg} t$.

●**27.42.** а) Докажите, что если $\sin^2 x = \sin y \cos y$, то $\cos 2x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + y\right)$;

б) докажите, что если $\cos^2 x = \sin y \cos y$, то $\cos(\pi + 2x) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - y\right)$.

27.43. а) Известно, что $\operatorname{tg} x = \frac{1}{7}$, $\sin y = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$. Докажите, что $x + 2y = \frac{\pi}{4}$.

б) Известно, что $\sin x = \frac{7}{25}$, $\cos y = \frac{7}{25}$, $\cos z = \frac{3}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, $0 < z < \frac{\pi}{2}$. Докажите, что $x + \frac{y}{2} = z$.

27.44. а) Зная, что $t = 2 \arccos \frac{3}{5}$, вычислите: $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$;

б) зная, что $t = 2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$, вычислите: $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$;

в) зная, что $t = 2 \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)$, вычислите: $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$;

г) зная, что $t = 2 \operatorname{arcctg} \frac{12}{5}$, вычислите: $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

27.45. а) Зная, что $t = \arccos \frac{3}{5}$, вычислите: $\sin \frac{t}{2}$, $\cos \frac{t}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$;

б) зная, что $t = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$, вычислите: $\sin \frac{t}{2}$, $\cos \frac{t}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$;

в) зная, что $t = \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)$, вычислите: $\sin \frac{t}{2}$, $\cos \frac{t}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$;

г) зная, что $t = \operatorname{arcctg} \frac{12}{5}$, вычислите: $\sin \frac{t}{2}$, $\cos \frac{t}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$.

Разберите решение примеров 6 и 10 в § 26 учебника. 239

Решите уравнение:

27.46. а) $\sin 2x - 2 \cos x = 0$; в) $\sin 2x - \sin x = 0$;
б) $2 \sin x = \sin 2x$; г) $\sin 2x - \cos x = 0$.

27.47. а) $\sin x \cos x = 1$; в) $\cos^2 \frac{x}{3} - \sin^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$;
б) $\sin 4x \cos 4x = \frac{1}{2}$; г) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$.

○**27.48.** Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:

а) $\cos 2x + 3\sin x = 1$;

б) $\sin^2 x = -\cos 2x$;

в) $\cos 2x = \cos^2 x$;

г) $\cos 2x = 2\sin^2 x$.

○**27.49.** Решите уравнение:

а) $2 - \cos 2x + 3\sin x = 0$;

б) $\cos 6x - \cos 3x - 2 = 0$;

в) $26\sin x\cos x - \cos 4x + 7 = 0$;

г) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x\cos x$.

○**27.50.** Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения:

а) $\cos x = \dfrac{\sin 22{,}5^\circ \cos 22{,}5^\circ}{\cos^2 67{,}5^\circ - \sin^2 67{,}5^\circ}$;

б) $\sin x = \dfrac{\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ}{4\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$.

Решите уравнение:

○**27.51.** а) $3\sin 2x + \cos 2x = 1$;

б) $\cos 4x + 2\sin 4x = 1$.

○**27.52.** а) $4\sin x + \sin 2x = 0$, $x \in [0; 2\pi]$;

б) $\cos^2\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$, $x \in \left[\dfrac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

○**27.53.** Сколько корней имеет уравнение:

а) $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin 2x$ на отрезке $\left[\dfrac{20\pi}{9}; \dfrac{28\pi}{9}\right]$;

б) $2\cos^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) + 1 = 0$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$?

○**27.54.** Сколько корней имеет данное уравнение на указанном промежутке:

а) $2\cos^2 x - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$, $(-0{,}5\pi; 3\pi)$;

б) $6\cos^2 x + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2 + 2$, $(-\pi; 3{,}5\pi)$?

Решите уравнение:

○**27.55.** а) $1 - \cos x = 2\sin\dfrac{x}{2}$;

в) $1 + \cos x = 2\cos\dfrac{x}{2}$;

б) $1 - \cos x = \sin x \sin\dfrac{x}{2}$;

г) $\sin x = \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}(1 + \cos x)$.

○27.56. а) $\sin^2 2x = 1$;

б) $\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$;

в) $\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$;

г) $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

○27.57. Найдите корни уравнения, удовлетворяющие неравенству $|x| < 4$:

а) $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3$;

б) $4\cos^2 2x + 8\cos^2 x = 7$.

●27.58. Решите уравнение:

а) $\sin 2x + 2\sin x = 2 - 2\cos x$;

б) $4\sin 2x + 8(\sin x - \cos x) = 7$.

○27.59. Докажите тождество:

а) $\sin x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$;

б) $\cos x = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$.

○27.60. Используя замену $u = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ и тождества из упражнения 27.59, решите уравнение:

а) $\sin x + 7\cos x = 5$;

б) $5\sin x + 10\cos x + 2 = 0$.

○27.61. Вычислите $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, если известно, что:

а) $\sin x + \cos x = 1{,}4$; $0 < x < \frac{\pi}{4}$;

б) $\sin x - \cos x = 0{,}2$; $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Решите неравенство:

○27.62. а) $4\sin^2 3x < 3$;

б) $4\cos^2\frac{x}{4} > 1$.

○27.63. а) $\sin 2x\cos 2x < \frac{1}{4}$;

б) $\cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4} > \frac{1}{2}$.

○27.64. а) $\cos^2 2x - \sin^2 2x \leqslant -1$;

б) $\sin 5x\cos 5x \geqslant \frac{1}{2}$;

в) $\sin^2 3x - \cos^2 3x \leqslant -1$;

г) $\sin\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3} \leqslant -\frac{1}{2}$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

○27.65. а) $y = 2\cos 2x + \sin^2 x$;

б) $y = 2\sin^2 3x - \cos 6x$.

○27.66. а) $y = 3 - \sin x + \cos 2x$;

б) $y = \cos 2x + 4\cos x - 1$.

●27.67. а) $y = \sin 3x + \cos 2x + 4\sin^3 x$;

б) $y = \cos 3x + \cos 2x - 4\cos^3 x$.

Постройте график функции:

27.68. а) $y = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}$; б) $y = 2\cos^2 x$.

27.69. а) $y = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$; б) $y = -\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$.

27.70. а) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$; б) $y = \frac{\sin 2x}{\cos x}$.

27.71. а) $y = \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} + \sin x$; в) $y = \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} + \sin x$;

б) $y = \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} + \cos x$; г) $y = \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} - \cos x$.

27.72. а) $y = \begin{cases} 2\sin x\cos x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 2\sin^2\frac{x}{4}, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2, \text{ если } x \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ 2 + \frac{\pi}{4} - x, \text{ если } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

27.73. а) $y = \frac{\sin 2x}{|\sin x|}$; в) $y = \frac{\sin 2x}{-|\cos x|}$;

б) $y = \frac{\sin 2x}{-2|\cos x|}$; г) $y = \frac{\sin 2x}{2|\sin x|}$.

§ 28 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Представьте в виде произведения:

28.1. а) $\sin 40° + \sin 16°$; в) $\sin 10° + \sin 50°$;
б) $\sin 20° - \sin 40°$; г) $\sin 52° - \sin 36°$.

28.2. а) $\cos 15° + \cos 45°$; в) $\cos 20° + \cos 40°$;
б) $\cos 46° - \cos 74°$; г) $\cos 75° - \cos 15°$.

28.3. а) $\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{10}$; в) $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{7}$;

б) $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}$; г) $\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{11}$.

Представьте в виде произведения:

28.4. а) $\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{20}$; в) $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{11}$;

б) $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{3\pi}{4}$; г) $\cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{4}$.

28.5. а) $\sin 3t - \sin t$;

б) $\cos(\alpha - 2\beta) - \cos(\alpha + 2\beta)$;

в) $\cos 6t + \cos 4t$;

г) $\sin(\alpha - 2\beta) - \sin(\alpha + 2\beta)$.

28.6. а) $\operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 35°$; в) $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 40°$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$; г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

○**28.7.** а) $\frac{1}{2} - \cos t$; в) $1 + 2\cos t$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin t$; г) $\cos t + \sin t$.

○**28.8.** а) $\sin 5x + 2\sin 6x + \sin 7x$;

б) $2\cos x + \cos 2x + \cos 4x$.

○**28.9.** а) $\sin t + \sin 2t + \sin 3t + \sin 4t$;

б) $\cos 2t - \cos 4t - \cos 6t + \cos 8t$.

Докажите тождество:

28.10. а) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

б) $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} \alpha$.

○**28.11.** а) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\alpha$;

б) $\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\alpha$.

○**28.12.** а) $\sin x + \sin y + \sin(x - y) = 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x - y}{2}$;

б) $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x$.

○**28.13.** а) $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$;

б) $\cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

Вычислите:

○**28.14.** а) $\dfrac{\cos 68^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 68^\circ - \sin 22^\circ}$; в) $\dfrac{\sin 130^\circ + \sin 110^\circ}{\cos 130^\circ + \cos 110^\circ}$;

б) $\dfrac{\sin \frac{7\pi}{18} - \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{7\pi}{18} - \cos \frac{\pi}{9}}$; г) $\dfrac{\sin \frac{5\pi}{18} + \sin \frac{11\pi}{9}}{\cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{11\pi}{9}}$.

○**28.15.** а) $\dfrac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$, если $\operatorname{ctg} 4\alpha = 0{,}2$;

б) $\dfrac{\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x}{\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x}$, если $\operatorname{tg} \dfrac{5x}{4} = 2$.

●**28.16.** а) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 130^\circ + \sin^2 110^\circ$;

б) $\cos^2 35^\circ + \cos^2 25^\circ - \cos^2 5^\circ$.

●**28.17.** а) $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ$.

Проверьте равенство:

28.18. а) $\sin 35^\circ + \sin 25^\circ = \cos 5^\circ$;

б) $\sin 40^\circ + \cos 70^\circ = \cos 10^\circ$;

в) $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ$;

г) $\cos 20^\circ - \sin 50^\circ = \sin 10^\circ$.

○**28.19.** а) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \cos 10^\circ = 0$;

б) $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ = 0$.

○**28.20.** а) $\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ = \sin 1^\circ$;

б) $\cos 115^\circ - \cos 35^\circ + \cos 65^\circ + \cos 25^\circ = \sin 5^\circ$.

●**28.21.** а) $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2 \operatorname{tg} 20^\circ$.

●**28.22.** Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то выполняется равенство:

а) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$;

б) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\beta}{2} \cos \dfrac{\gamma}{2}$.

○**28.23.** а) Зная, что $\sin 2x + \sin 2y = a$, $\cos 2x + \cos 2y = b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), вычислите $\operatorname{tg}(x + y)$;

б) зная, что $\sin x - \sin y = a$, $\cos x - \cos y = b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), вычислите $\operatorname{ctg} \dfrac{x + y}{2}$.

●28.24. Докажите:

а) если $2\sin x = \sin(x + 2y)$, то $\operatorname{tg}(x + y) = 3\operatorname{tg} y$;

б) если $2\cos x = \cos(x + 2y)$, то $\operatorname{ctg}(x + y) - 2\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y$.

●28.25. Докажите:

а) если $\cos^2 x + \cos^2 y = m$, то $\cos(x + y)\cos(x - y) = m - 1$;

б) если $\cos^2(x + y) + \sin^2 x + \sin^2 y = m$, то $\sin x \sin y \cos(x + y) = \frac{1 - m}{2}$.

Разберите решение примеров 1—3 в § 28 учебника. 246

Решите уравнение:

○28.26. а) $\cos x + \cos 3x = 0$;
б) $\sin 12x + \sin 4x = 0$;
в) $\cos x = \cos 5x$;
г) $\sin 3x = \sin 17x$.

○28.27. а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
б) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$.

○28.28. а) $\sin 3x = \cos 2x$;
б) $\sin(5\pi - x) = \cos(2x + 7\pi)$;
в) $\cos 5x = \sin 15x$;
г) $\sin(7\pi + x) = \cos(9\pi + 2x)$.

○28.29. а) $1 + \cos 6x = 2\sin^2 5x$;
б) $\cos^2 2x = \cos^2 4x$;
в) $\sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{7x}{2}$;
г) $\sin^2 x + \sin^2 3x = 1$.

○28.30. а) $2\sin^2 x + \cos 5x = 1$;
б) $2\sin^2 3x - 1 = \cos^2 4x - \sin^2 4x$.

○28.31. а) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 5x = 0$;
б) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} x$;
в) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 4x$;
г) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{3x}{2} = 0$.

○28.32. а) $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$;
б) $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$.

○28.33. Сколько корней имеет заданное уравнение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

а) $\sin 2x + \sin 6x = \cos 2x$;

б) $2\cos^2 x - 1 = \sin 3x$?

○28.34. Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку $(0;\ 2{,}5)$:

а) $\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$;

б) $\sin 2x + 5\sin 4x + \sin 6x = 0$.

○**28.35.** Найдите все значения x, при которых числа a, b, c в указанном порядке являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, если:

а) $a = \cos 7x$, $b = \cos 2x$, $c = \cos 11x$;

б) $a = \sin 3x$, $b = \cos x$, $c = \sin 5x$.

○**28.36.** Решите неравенство:

а) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1$;

б) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2}$.

○**28.37.** Постройте график функции:

а) $y = 1{,}5\left(\cos\frac{9x + 10\pi}{6} + \cos\frac{9x - 10\pi}{6}\right)$;

б) $y = 2\left(\sin\frac{9x + 2\pi}{3} + \sin\frac{9x - 2\pi}{3}\right)$.

●**28.38.** Постройте график уравнения:

а) $\sin 2x = \sin 2y$;

б) $\cos 2x = \cos 2y$.

§ 29 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ

Представьте в виде суммы:

29.1. а) $\sin 23° \sin 32°$;

б) $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{8}$;

в) $\sin 14° \cos 16°$;

г) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{5}$.

29.2. а) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$;

б) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$;

в) $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$;

г) $2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$.

29.3. а) $\cos\alpha\sin(\alpha + \beta)$;

б) $\sin(60° + \alpha)\sin(60° - \alpha)$;

в) $\sin\beta\cos(\alpha + \beta)$;

г) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

○**29.4.** а) $\sin 10° \cos 8° \cos 6°$;

б) $4\sin 25° \cos 15° \sin 5°$.

○**29.5.** а) $\sin x \sin y \sin z$;

б) $\cos x \cos y \cos z$.

○**29.6.** а) $\sin^2 x \cos 4x$;

б) $\cos^2 2x \sin 3x$.

Докажите тождество:

29.7. а) $2\sin t\,\sin 2t + \cos 3t = \cos t$;

б) $\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) = \frac{1}{2}$.

29.8. а) $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{4}$;

б) $4\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 3 - 4\sin^2 x$.

29.9. а) $4\sin x\,\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x$;

б) $\operatorname{tg} x\,\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \operatorname{tg} 3x$.

29.10. $\cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

29.11. а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \ldots + \sin nx =$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\,\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}};$$

б) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \ldots + \cos nx =$

$$= \frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\,\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Вычислите:

29.12. а) $\cos^2 3^\circ + \cos^2 1^\circ - \cos 4^\circ \cos 2^\circ$;

б) $\sin^2 10^\circ + \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

29.13. а) $\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$; б) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 40^\circ} + 4\cos 100^\circ$.

29.14. а) $2\sin 87^\circ \cos 57^\circ - \sin 36^\circ$;

б) $2\sin 59^\circ \sin 14^\circ + \sin 163^\circ$.

29.15. а) $\sin 12^\circ \cos 72^\circ - \cos 33^\circ \cos 27^\circ$;

б) $2\cos 28^\circ \cos 17^\circ - 2\sin 31^\circ \sin 14^\circ - 2\sin 14^\circ \sin 3^\circ$.

29.16. а) $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$;

б) $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

○**29.17.** Сравните числа:

а) $a = \sin 1 \cos 2,\ b = \sin 3 \cos 4$;

б) $a = \cos 2 \cos 4,\ b = -\sin 3{,}5 \sin 2{,}5$.

●**29.18.** Докажите неравенство:

а) $\sin(x + 2)\cos(x - 2) < \sin(x + 3)\cos(x - 3)$;

б) $\cos(2x - 3)\cos(2x + 3) > \sin(1 + 2x)\sin(1 - 2x)$.

●**29.19.** а) Зная, что $\cos x = \frac{3}{4}$, вычислите $16\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}$;

б) зная, что $\cos x = -\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < x < \pi$, вычислите $125\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$.

●**29.20.** Во сколько раз:

а) число $(\sin 70° + \sin 50°)^2$ больше числа $\sin^2 80°$;

б) число $(\cos 65° + \sin 65°)^2$ больше числа $\sin^2 70°$;

в) число $(\cos 50° + \cos 40°)^2$ больше числа $\sin^2 85°$;

г) число $(\operatorname{tg} 57° + \operatorname{tg} 3°)^2$ больше числа $(\cos 54° + 0{,}5)^{-2}$?

Решите уравнение:

○**29.21.** а) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 0{,}25 = 0$;

б) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

○**29.22.** а) $2\sin x \cos 3x + \sin 4x = 0$;

б) $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$.

○**29.23.** а) $\sin 3x \cos x = \sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}$;

б) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin^2 x = 0$;

в) $\sin 2x \cos x = \sin x \cos 2x$;

г) $\cos 2x \cos x = \cos 2{,}5x \cos 0{,}5x$.

○**29.24.** Найдите наименьший положительный и наибольший отрицательный корень уравнения:

а) $\sin x \sin 3x = 0{,}5$; б) $\cos x \cos 3x = -0{,}5$.

○**29.25.** Найдите все значения x, при которых числа a, b, c в указанном порядке являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, если:

а) $a = \cos 6x,\ b = \cos 4x,\ c = \cos 2x$;

б) $a = \sin 2x,\ b = \sin 3x,\ c = \sin 4x$.

○**29.26.** Решите неравенство:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{8} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right) < 0;$

б) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) \geqslant 0;$

в) $\sin\left(x - \frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) \leqslant 0;$

г) $\cos\frac{3x + \pi}{6}\cos\frac{3x - \pi}{6} > 0.$

●**29.27.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} = \frac{1}{2}, \\ 2\sin\frac{x - y}{2}\cos\frac{x + y}{2} = \frac{1}{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \cos(x + y)\cos(x - y) = \frac{1}{4}, \\ \sin(x + y)\sin(x - y) = \frac{3}{4}. \end{cases}$

○**29.28.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{24}\right);$

б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

●**29.29.** Постройте график функции:

а) $y = 2\left|\sin\left(x - \frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)\right|;$

б) $y = -3\left|\cos\frac{3x + \pi}{6}\cos\frac{3x - \pi}{6}\right|.$

Постройте график уравнения:

●**29.30.** а) $2\sin(x + y)\cos y = \sin x;$

б) $2\cos(x + y)\cos x = \cos y.$

●**29.31.** а) $\cos\frac{x(y - 1)}{2}\cos\frac{x(y + 1)}{2} = \cos^2\frac{x}{2};$

б) $\sin\frac{y(x + 1)}{2}\cos\frac{y(x - 1)}{2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right).$

§ 30 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $A\sin x + B\cos x$ К ВИДУ $C\sin(x + t)$

Преобразуйте данное выражение к виду $C\sin(x + t)$ или $C\cos(x + t)$:

30.1. а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x$;
б) $\sin x + \sqrt{3}\cos x$;
в) $\sin x - \cos x$;
г) $2\sin x - \sqrt{12}\cos x$.

30.2. а) $3\sin x + 4\cos x$;
б) $5\cos x - 12\sin x$;
в) $7\sin x - 24\cos x$;
г) $8\cos x + 15\sin x$.

○**30.3.** Докажите тождество:

а) $\sin x + \cos x + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$;

б) $\cos 2x - \sin 2x - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}\sin^2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$.

○**30.4.** Преобразуйте сумму в произведение:

а) $\sin t + \cos t + 5\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\sin t - \cos t + \sqrt{34}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$.

○**30.5.** Вычислите:

а) $\dfrac{\sin 38° - \cos 38°}{\sqrt{2}\sin 7°}$;

б) $\dfrac{\sin 377° - \sqrt{3}\cos 17°}{\cos 407°}$;

в) $\dfrac{\sin 17° + \sqrt{3}\cos 17°}{2\cos 347°}$;

г) $\dfrac{\sin 752° + \cos 328°}{\sqrt{2}\sin 437°}$.

○**30.6.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:
а) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$;
б) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$;
в) $y = \sin x - \cos x$;
г) $y = \sqrt{6}\sin x - \sqrt{2}\cos x$.

○**30.7.** Найдите область значений функции:
а) $y = 3\sin 2x - 4\cos 2x$;
б) $y = 5\cos 3x + 12\sin 3x$;
в) $y = 7\sin\frac{x}{2} + 24\cos\frac{x}{2}$;
г) $y = 8\cos\frac{x}{3} - 15\sin\frac{x}{3}$.

С30.8. Существуют ли значения x, при которых выполняется равенство:

а) $\sin 5x + \cos 5x = 1{,}5$;

б) $3\sin 2x - 4\cos 2x = \sqrt{26}$;

в) $\sin 7x - \sqrt{3}\cos 7x = \frac{\pi}{2}$;

г) $5\sin x + 12\cos x = \sqrt{170}$?

С30.9. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$;

б) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$;

в) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$;

г) $y = \sin x - \cos x$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

С30.10. а) $y = \cos x - 2\sin x - 1$;

б) $y = |5\sin x + 12\cos x - 17|$;

в) $y = 3\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} - 5$;

г) $y = |7\sin 2x - 24\cos 2x| + 15$.

●30.11. а) $y = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$;

б) $y = \cos 2x + \sin 2x - \sqrt{7}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

С30.12. При каком значении параметра a наибольшее значение заданной функции равно числу M:

а) $y = 6\sin 1{,}5x - 8\cos 1{,}5x + a$, $M = 17$;

б) $y = 7\sin 0{,}3x + 24\cos 0{,}3x + a$, $M = -17$?

С30.13. При каком значении параметра a наименьшее значение заданной функции равно числу m:

а) $y = -9\sin 1{,}4x - 12\cos 1{,}4x + a$, $m = 1$;

б) $y = 3{,}5\sin 0{,}2x - 12\cos 0{,}2x + a$, $m = -1$?

●30.14. При каком значении параметра a наибольшее значение функции $y = f(x)$ равно наименьшему значению функции $y = g(x)$:

а) $f(x) = 7\sin 5x - 24\cos 5x + a - 1$, $g(x) = 3 - 2\cos 4x$;

б) $f(x) = 9\sin(x - 2) + 12\cos(x - 2) - 5 - a$, $g(x) = 2 + 7\sin(2x + 1)$?

С30.15. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$;

б) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

в) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$;

г) $\sin x - \cos x = 1$.

Решите уравнение:

○**30.16.** а) $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{2}$;

б) $\sin 5x - \cos 5x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$;

в) $\cos\dfrac{x}{2} - \sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2} + 1 = 0$;

г) $\sin\dfrac{x}{3} + \cos\dfrac{x}{3} = 1$.

○**30.17.** а) $4\sin x - 3\cos x = 5$;

б) $3\sin 2x + 4\cos 2x = 2{,}5$;

в) $12\sin x + 5\cos x + 13 = 0$;

г) $5\cos\dfrac{x}{2} - 12\sin\dfrac{x}{2} = 6{,}5$.

○**30.18.** а) $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin 3x$;

б) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\cos 3x$;

в) $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos x$;

г) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin 4x$.

●**30.19.** а) $2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0$;

б) $5\sin x - 12\cos x + 13\sin 3x = 0$.

●**30.20.** а) $\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^2 - 5 = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$;

б) $\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)^2 + 1 = 4\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

●**30.21.** а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x + 2 = \dfrac{12}{5\pi}x$;

б) $\sqrt{2}\,(\cos x - \sin x) = 2x - \dfrac{\pi}{2}$.

○**30.22.** Решите неравенство:

а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x > 1$; б) $3\sin x - 4\cos x < 2{,}5$.

○**30.23.** При каких значениях параметра a уравнение не имеет решений:

а) $5\sin 2x + 12\cos 2x = 2a - 1$;

б) $3\cos\dfrac{x}{2} - 4\sin\dfrac{x}{2} + 1 = a^2$?

Докажите, что при любых значениях x выполняется неравенство:

○30.24. а) $2\sin^2 x + \sin 2x < 2{,}5$;

б) $16\sin^2 3x + 15\sin 6x \leqslant 25$.

●30.25. а) $3\sin x + 5\cos x < \sqrt[3]{210}$;

б) $\sqrt{3}\sin x - 7\cos x > -\sqrt[3]{390}$.

○30.26. При каких значениях параметра a решением неравенства является любое действительное число x:

а) $12\sin 2x - 35\cos 2x < 148a^2$;

б) $35\sin 3x + 12\cos 3x \geqslant 18{,}5(a^3 - 10)$?

●30.27. Сколько целых чисел содержится в области значений функции $y = \left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^2 + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$?

●30.28. Решите уравнение: $\cos x - \sin x \cos 4x = \sqrt{2}$.

§ 31 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (продолжение)

Решите уравнение:

○31.1. а) $\sin(x - 1) = \cos(x + 2)$;

б) $\sin(3x + 3) = \cos(x - 1)$.

○31.2. а) $\sin x \sin 5x = \cos 4x$; б) $\cos x \cos 5x = \cos 6x$.

○31.3. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$.

○31.4. а) $2\cos^2 5x + \cos 3x = 1$;

б) $\sin 5x + \sin x + 2\cos^2 x = 1$.

○31.5. а) $8\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin x - 4 = 0$;

б) $4\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 1{,}5 + \sin x$.

○31.6. а) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$;

б) $\cos^2 2x + \cos^2 4x + \cos^2 6x = 1{,}5$.

Решите уравнение:

○**31.7.** а) $\sin^2\frac{x}{2} + \sin^2 x + \sin^2\frac{5x}{2} + \sin^2 2x = 2;$

б) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$

○**31.8.** $\operatorname{tg}(x - 15°)\operatorname{ctg}(x + 15°) = \frac{1}{3}.$

●**31.9.** $8\sin^6 x + 3\cos 2x + 2\cos 4x + 1 = 0.$

●**31.10.** а) $5\sin 3x + 2\sin x = 0;$ б) $7\cos 3x - 3\cos x = 0.$

●**31.11.** а) $3|\cos x| + 2\cos x = 5|\sin x| - 3\sin x;$

б) $7|\cos x| - 4\cos x = 3|\sin x| + 2\sin x.$

○**31.12.** а) $4\cos^3\frac{x}{2} + 3\sqrt{2}\sin x = 8\cos\frac{x}{2};$

б) $\frac{7}{4}\cos\frac{x}{4} = \cos^3\frac{x}{4} + \sin\frac{x}{2}.$

○**31.13.** $\cos^4 x + \sin^4 x - \sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0.$

○**31.14.** а) $\cos 4x + 5\cos^2 x = 0{,}75;$

б) $\cos 4x + 3\sin^2 x = 0{,}25.$

○**31.15.** $2\sin^3 x - \cos 2x = \sin x.$

●**31.16.** $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3 + \cos 4x.$

○**31.17.** Решите уравнение $2\sin x - 3\cos x = 3$ двумя способами:

а) с помощью универсальной подстановки $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2};$

б) сведя его к однородному уравнению второй степени относительно аргумента $\frac{x}{2}.$

Решите уравнение:

○**31.18.** а) $3\sin 2x + \cos 2x = 2;$ б) $\cos 4x + 2\sin 4x = 1.$

●**31.19.** $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$

○**31.20.** Применив подстановку $y = \cos x - \sin x$, решите уравнение $4 - 4(\cos x - \sin x) = \sin 2x.$

●**31.21.** Решите уравнение:

а) $\sin x\cos x + 6\cos x + 6 = 6\sin x;$

б) $5\sin 2x - 11\cos x = 11\sin x - 7.$

Решите уравнение:

31.22. $2(1 - \sin x - \cos x) + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0.$

31.23. а) $\cos\frac{4x}{3} = \cos^2 x;$ б) $32\cos^6 x - \cos 6x = 1.$

31.24. $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos 13x.$

31.25. а) $3\cos(x + 1) - 4\sin(x + 1) = 5;$
б) $15\sin(2x - 3) + 8\cos(2x - 3) = 8{,}5.$

31.26. $3\sin x - 5\sin\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos x.$

31.27. Найдите корни уравнения $\cos 4x + \frac{10\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 3$, принадлежащие отрезку $[-2; 1{,}4]$.

31.28. Сколько корней уравнения

$$\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$$

удовлетворяют неравенству $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + x + 3} \leqslant 0$?

31.29. Сколько корней уравнения $\frac{\cos^2 x - \cos x - \sin^2 x}{1 - \cos 2x - \sin x} = 0$ удовлетворяют неравенству $36\pi^2 + 7\pi x - 4x^2 \geqslant 0$?

Решите уравнение:

31.30. $3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{\sin x}.$

31.31. $\cos 2x - 3\cos x + 1 = \frac{1}{(\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x)\sin(x - \pi)}.$

31.32. $\frac{\cos^2 x(1 + \operatorname{ctg} x)}{\sin x - \cos x} = 3\cos x.$

31.33. а) $\frac{2 - \sin x + \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0;$

б) $\frac{6\sin^2 x - 6\sin x + \cos 2x + 1}{12x^2 - 8\pi x + \pi^2} = 0.$

31.34. а) $2\operatorname{ctg} 3x - 2\operatorname{tg} 3x - 4\operatorname{tg} 6x = 1;$
б) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x = 8\operatorname{tg} 8x.$

Решите уравнение:

31.35. $6\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

31.36. $\sin 5x + \sin x = 2 + 2\cos^2 x$.

31.37. $\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)\sin 3x = 2$.

31.38. $\cos 2x\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) = 1$.

31.39. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^4 4x$.

31.40. $\sqrt{9 - x^2}(\sin 2x - 3\cos x) = 0$.

31.41. а) $\sqrt{25 - 4x^2}(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0$;

б) $\sqrt{49 - 4x^2}\left(\sin \pi x + 3\cos \frac{\pi x}{2}\right) = 0$.

31.42. а) $\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{2}{3}\sin x\right)\sqrt{4x - x^2 + 5} = 0$;

б) $(2\sin 2x - \operatorname{tg} x)\sqrt{2 - x - x^2} = 0$.

31.43. $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$.

31.44. а) $\sqrt{\sin 7x - \sin 5x} = \sqrt{\sin x}$;

б) $\sqrt{\cos 5x + \cos x - \sin 5x} = \sqrt{\sin x}$.

31.45. а) $\sin\left(\pi\sqrt{5 - x^2}\right) = 0{,}5$; б) $\cos\left(\pi\sqrt{7 - x^2}\right) = -0{,}5$.

31.46. $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{1 + x^2} + \sin\frac{2\pi x}{1 + x^2} = 2$.

31.47. $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 4\sin x\cos x$.

31.48. а) Дано уравнение с параметром a: $\sqrt{a\cos 2x - 3\sin 2x} = \cos x$. Известно, что $x = 0$ является корнем этого уравнения. Найдите остальные корни.

б) Дано уравнение с параметром a: $\sqrt{2\sin 2x - a\cos 2x} + \sin x = 0$. Известно, что $x = -\frac{\pi}{2}$ является корнем этого уравнения. Найдите остальные корни.

6 ГЛАВА КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 32 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Прочитайте п. 1 в § 32 учебника. 265

32.1. Приведите примеры линейных уравнений с действительными коэффициентами, которые:

а) имеют целые корни, но не имеют натуральных корней;

б) имеют рациональные корни, но не имеют целых корней;

в) имеют действительные корни, но не имеют рациональных корней;

г) не имеют действительных корней.

32.2. Приведите примеры квадратных уравнений с действительными коэффициентами, которые:

а) имеют целые корни, но не имеют натуральных корней;

б) имеют рациональные корни, но не имеют целых корней;

в) имеют действительные корни, но не имеют рациональных корней;

г) не имеют действительных корней.

32.3. Укажите хотя бы одно значение параметра a, при котором у уравнения $2x^2 + 4x + a = 0$:

а) оба корня целые, но не натуральные числа;

б) оба корня рациональные, но не целые числа;

в) оба корня действительные, но не рациональные числа;

г) укажите все значения a, при которых действительных корней нет.

32.4. Укажите хотя бы одно значение параметра a, при котором у уравнения $3x^2 + ax + 6 = 0$:

а) оба корня целые, но не натуральные числа;

б) оба корня рациональные, но только один из них — целое число;

в) оба корня действительные, но не рациональные числа;

г) укажите все значения a, при которых действительных корней нет.

Вычислите:

32.5. а) i^3; б) i^5; в) i^{22}; г) $i^{17} + i^{2005}$.

○**32.6.** а) $(-i)^3$; б) $(-2i)^5$; в) $-i^{22} - (-i)^{22}$; г) $i^3 + i^5 + i^7 + ... + i^{2005}$.

32.7. Найдите значение многочлена $z^2 + 361$ при заданном значении переменной z:

а) $z = i$;
б) $z = -2i$;
в) $z = -11i$;
г) $z = -19(-i)^3$.

○**32.8.** Найдите значение многочлена $z^3 + 3z$ при заданном значении переменной z:

а) $z = -i$;
б) $z = \sqrt{2}i$;
в) $z = -3i$;
г) $z = -\sqrt{3}i$.

○**32.9.** Дана геометрическая прогрессия с первым членом, равным i, и знаменателем, равным $-i$.

а) Выпишите первые 7 членов этой прогрессии;
б) найдите значение 27-го члена прогрессии;
в) найдите сумму первых 2007 членов прогрессии;
г) найдите сумму членов прогрессии с 15-го по 30-й.

Для комплексных чисел z_1 и z_2 найдите их сумму $z_1 + z_2$ и разность $z_1 - z_2$, если:

32.10. а) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$;
б) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + 2i$;
в) $z_1 = -i$, $z_2 = 1 - i$;
г) $z_1 = i^3 + 4i^4$, $z_2 = i^2 - 3(-i)^3$.

○**32.11.** а) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - 2i$;
б) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -3 + 2i$;
в) $z_1 = i^{15}$, $z_2 = 15 + i$;
г) $z_1 = i^{17} + 18i^{18}$, $z_2 = 15i^{15} - 16(-i)^{16}$.

○**32.12.** Дана арифметическая прогрессия с первым членом, равным $3 - 2i$, и разностью, равной $-1 + i$.

а) Составьте формулу n-го члена прогрессии;
б) найдите значение 15-го члена прогрессии;
в) найдите сумму первых 20 членов этой прогрессии;
г) найдите сумму членов прогрессии с 10-го до 40-го.

32.13. Докажите, что:

а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \in \boldsymbol{C}$, $z_2 \in \boldsymbol{C}$;
б) $(a + b)z = az + bz$, $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, $z \in \boldsymbol{C}$;
в) $(ab)z = a(bz)$, $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, $z \in \boldsymbol{C}$;
г) $a(z_1 + z_2) = az_1 + az_2$, $a \in \boldsymbol{R}$, $z_1 \in \boldsymbol{C}$, $z_2 \in \boldsymbol{C}$.

○32.14. Известно, что сумма действительной и мнимой частей комплексного числа az, $a \in \mathbf{R}$, равна 1. Найдите a, если:

а) $z = 1 + i$;
б) $z = 7 + 3i$;
в) $z = 13 - 23i$;
г) $z = 1 - i$.

○32.15. Вычислите $az_1 + bz_2$, если:

а) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $a = 2$, $b = -1$;
б) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + 2i$, $a = -4$, $b = -5$;
в) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $a = -2$, $b = 3$;
г) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -2 + 3i$, $a = 12$, $b = -11$.

○32.16. Известно, что число $az_1 + z_2$, $a \in \mathbf{R}$, является чисто мнимым. Найдите a, если:

а) $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 6 - i$;
б) $z_1 = 12 - 13i$, $z_2 = 3i$;
в) $z_1 = 8 + 3i$, $z_2 = -1 - 2i$;
г) $z_1 = i$, $z_2 = -1 + 2i$.

○32.17. Известно, что число $z_1 + az_2$, $a \in \mathbf{R}$, является действительным. Найдите a, если:

а) $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 6 - i$;
б) $z_1 = 12 - 13i$, $z_2 = (3 + i)^2$;
в) $z_1 = 8 + 3i$, $z_2 = -1 - 2i$;
г) $z_1 = i$, $z_2 = (2 - 3i)^2$.

○32.18. Найдите действительные числа a и b, для которых верно равенство $z = az_1 + bz_2$, если:

а) $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + i$, $z = 5 + 2i$;
б) $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 3 - i$, $z = i$;
в) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z = 3 + 5i$;
г) $z_1 = 4 - i$, $z_2 = -7 + 2i$, $z = 1$.

Вычислите:

32.19. а) $i(1 + i)$;
б) $i(-3 + 2i)$;
в) $(4 - 3i)i$;
г) $i(4 - 3i)i(4 + 3i)$.

32.20. а) $(1 - 2i)(1 + i)$;
б) $(1 - i)(1 + i)$;
в) $(4 - 3i)(-4 + 3i)$;
г) $(12 + 5i)(12 - 5i)$.

32.21. а) $(1 + i)^2$;
б) $(1 - i)^3$;
в) $(2 + i)^5$;
г) $(1 + i)^3 + (1 - i)^2$.

32.22. Решите уравнение:

а) $iz = 1$;
б) $(1 + i)z = 1$;
в) $(1 + i)z = i$;
г) $(1 + i)z = 1 - i$.

○32.23. Дана геометрическая прогрессия с первым членом, равным i, и знаменателем, равным $1 - i$.

а) Найдите третий член прогрессии.
б) Найдите девятый член прогрессии.

в) На каких местах в этой прогрессии расположены чисто мнимые числа?

г) На каких местах в этой прогрессии расположены действительные числа?

268 **Прочитайте п. 2 в § 32 учебника.**

Вычислите:

○**32.24.** а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1-i}{i}$; в) $\frac{1-i}{1+i}$; г) $\frac{1+i}{1-i}$.

○**32.25.** а) $i^2 + i^{-2}$; б) $i^3 + i^{-3}$; в) $i^3 + i^{-5}$; г) $i^{-3} + i^{-5}$.

●**32.26.** а) $((i : (1 + i)) : (1 + 2i)) : (1 + 3i)$;
б) $i : ((1 + i) : ((1 + 2i) : (1 + 3i)))$.

○**32.27.** Решите уравнение:

а) $iz = (1 - i)$;
б) $(1 + i)z = (1 - i)$;
в) $(1 + i)z = i$;
г) $(1 + i)^2z = (1 - i)^3$.

○**32.28.** Найдите действительные числа a и b, для которых верно равенство $\frac{z_1}{z_2} = a\frac{z_2}{z_1} + bz_2$, если:

а) $z_1 = i$, $z_2 = 2$;
б) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$;
в) $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$;
г) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + 2i$.

○**32.29.** Найдите значение функции $w = \frac{z^2 + 1}{z - i}$, если:

а) $z = 1 + i$;
б) $z = 1 - i$;
в) $z = 2i$;
г) $z = 2 + i$.

○**32.30.** а) Докажите, что число $\left(b + i\sqrt{a}\right)^3 + \left(b - i\sqrt{a}\right)^3$ при любых действительных значениях $a \geqslant 0$ и b является действительным.

б) Вычислите $\left(2 + i\sqrt{5}\right)^3 + \left(2 - i\sqrt{5}\right)^3$.

●**32.31.** При каких действительных значениях a число $z = (2 - ai)^3 - (3 - ai)^2 + 5 + a(1 - a^2i)$:

а) является действительным;
б) является чисто мнимым?

○**32.32.** Для комплексного числа z найдите сопряжённое число $\bar{z}$ и вычислите произведение $z\bar{z}$ и частное $\frac{\bar{z}}{z}$:

а) $z = i$;
б) $z = -i$;
в) $z = 3 - 7i$;
г) $z = -5 - 6i$.

○**32.33.** По заданному сопряжённому числу $\bar{z}$ восстановите комплексное число z и вычислите произведение $z\bar{z}$ и частное $\frac{z}{\bar{z}}$:

а) $\bar{z} = 2i$;

б) $\bar{z} = -3i$;

в) $\bar{z} = 1 - i$;

г) $\bar{z} = -1 + 3i$.

○**32.34.** Дано: $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 4 + i$. Найдите:

а) $\frac{z_1}{\bar{z}_2}$; б) $\frac{z_1^2}{(\bar{z}_2)^2}$; в) $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$; г) $\frac{(\bar{z}_1)^2}{z_2}$.

○**32.35.** Дано: $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = -2 + 3i$. Найдите:

а) $\frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1}$;

б) $\frac{(z_1 + z_2)^2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}$;

в) $\frac{z_2}{z_2 + \bar{z}_1}$;

г) $\frac{z_2 - 2\bar{z}_1}{(\bar{z}_2 + z_1)^3}$.

●**32.36.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5z_1 - 3\bar{z}_2 = -9 + 5i, \\ 4\bar{z}_1 + z_2 = 3 - 4i; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7z_1 + 2\bar{z}_2 = 7 - 4i, \\ 3\bar{z}_1 - z_2 = 3 - 2i; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 7 - 6i, \\ 3z_1 - 2z_2 = -3 - i; \end{cases}$

г) $\begin{cases} i\bar{z}_1 + 2z_2 = 3 + 8i, \\ 2iz_1 - \bar{z}_2 = 7i. \end{cases}$

○**32.37.** Среди корней уравнения $z^2 + (\bar{z})^2 = 8$ укажите все корни:

а) с нулевой мнимой частью;

б) с мнимой частью, равной 1;

в) у которых действительная часть равна мнимой части;

г) у которых действительная часть в три раза больше положительной мнимой части.

●**32.38.** Среди корней уравнения $\bar{z} + 1 = \frac{1}{z + 1}$ найдите корень:

а) у которого действительная часть наименьшая;

б) у которого мнимая часть наименьшая;

в) который ближе всего расположен к началу координат;

г) который ближе всего расположен к числу i.

§ 33 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Для комплексного числа $z = x + iy$, его действительной части x и его мнимой части y используют следующие обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ (от французских слов *reelle* — действительный, *imaginaire* — мнимый).

33.1. а) Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие комплексным числам $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = -2 + 5i$, $z_4 = -9 + i$, $z_5 = -3 - 2i$.

б) Укажите те точки, которые лежат левее оси ординат. Что можно сказать о знаке действительной части каждой из таких точек?

в) Укажите те точки, которые лежат выше оси абсцисс. Что можно сказать о знаке мнимой части каждой из таких точек?

г) Соедините данные точки последовательно отрезками. Сколько получилось точек пересечения замкнутой ломаной с осями координат? Запишите комплексные числа, которым соответствуют эти точки.

33.2. а) Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие комплексным числам $z_1 = -5 - 4i$, $z_2 = 1 + 8i$, $z_3 = -2 - 4i$, $z_4 = 8 + i$, $z_5 = -1 - 8i$.

б) Соедините заданные точки последовательно отрезками. Сколько получилось точек пересечения с осями координат? Запишите комплексные числа, которым соответствуют эти точки.

33.3. а) Отметьте на координатной плоскости точки $\overline{z}_n$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$), если $z_1 = -5 - 3i$, $z_2 = 1 + 6i$, $z_3 = -3 - 6i$, $z_4 = 9 + 2i$, $z_5 = 1 - 6i$.

б) Соедините отмеченные точки последовательно отрезками. Сколько чисто мнимых чисел имеется на полученной ломаной? Назовите их.

в) Сколько на этой ломаной лежит чисел, для которых $\operatorname{Re} z = -3$? Назовите их.

г) Сколько на ломаной чисел, для которых $\operatorname{Im} z = 3$? Назовите их.

Изобразите на координатной плоскости множество всех комплексных чисел z, удовлетворяющих заданному условию:

○**33.4.** а) Действительная часть равна -2;

б) мнимая часть равна 3 или 4;

в) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$;

г) $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$.

○**33.5.** а) $\operatorname{Re} z = 4$ или $\operatorname{Im} z = 4$;

б) $|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z|$;

в) $\operatorname{Re} z = 5$ или $\operatorname{Im} z = 4$;

г) $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$ или $(\operatorname{Re} z)^2 = \operatorname{Im} z$.

○**33.6.** а) Действительная часть на 4 больше мнимой части;

б) сумма действительной и мнимой частей равна 4;

в) сумма квадратов действительной и мнимой частей равна 4;

г) квадрат суммы действительной и мнимой частей равен 4.

●**33.7.** а) $|\mathrm{Re}\, z| - |\mathrm{Im}\, z| = 1$;

б) $(\mathrm{Re}\, z)^2 = \mathrm{Im}\, z + 1$;

в) $(\mathrm{Re}\, z)^2 = \mathrm{Im}\, z - 1$;

г) $(\mathrm{Re}\, z)(\mathrm{Im}\, z) = 1$.

○**33.8.** а) Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие комплексным числам $z_0 = 1$, $z_1 = 1 + i$, $z_2 = (1 + i)^2$, $z_3 = (1 + i)^3$, ... , $z_7 = (1 + i)^7$.

б) Чему равна величина угла: $\angle z_0Oz_1$, $\angle z_1Oz_2$, ... , $\angle z_6Oz_7$, $\angle z_7Oz_0$?

в) Перечислите все пары точек, лежащие по разные стороны от оси абсцисс. Сколько таких пар?

г) Запишите все числа, у которых произведение действительной и мнимой частей отрицательно. Сколько таких чисел?

33.9. а) Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие комплексным числам $z_0 = 1$, $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = z_1^2$, $z_3 = z_1^3$, $z_4 = z_1^4$, $z_5 = z_1^5$.

б) Чему равна величина угла: $\angle z_0Oz_1$, $\angle z_1Oz_2$, ... , $\angle z_5Oz_0$?

в) На каком расстоянии от начала координат находятся все эти точки?

г) Перечислите все пары точек, соответствующих сопряжённым друг другу числам. Сколько таких пар?

Изобразите на координатной плоскости множество всех комплексных чисел z, у которых:

○**33.10.** а) Действительная часть больше мнимой части;

б) мнимая часть не меньше действительной части;

в) мнимая часть больше 2, а действительная часть не больше 3;

г) мнимая часть не меньше 2, а действительная часть меньше 3.

●**33.11.** а) $\mathrm{Im}\, z \geqslant 2$ или $\mathrm{Re}\, z < 3$;

б) $\mathrm{Im}\, z > 2$ или $\mathrm{Re}\, z \leqslant 3$;

в) $\mathrm{Re}\, z > (\mathrm{Im}\, z)^2$ и $(\mathrm{Re}\, z)^2 > \mathrm{Im}\, z$;

г) $\mathrm{Im}\, z \geqslant 2\,\mathrm{Re}\, z$ или $\mathrm{Re}\, z < 3\,\mathrm{Im}\, z$.

○**33.12.** а) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \geqslant 0$;

б) $1 < \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 2$;

в) $1 < (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 < 16$;

г) $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 < 1$ или $16 < (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

33.13. Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = -1 + 3i$, а также числа:

а) $3z_1$; б) $-2z_2$; в) $z_1 + z_2$; г) $3z_1 - 2z_2$.

33.14. Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -5 + 2i$, а также числа:

а) $\overline{z}_1$; б) $-\overline{3z_2}$; в) $\overline{z_1 + z_2}$; г) $\overline{z_1 - 3z_2}$.

○**33.15.** а) Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = -3 + i$ и $z_2 = 5 + 2i$.

б) Найдите действительный коэффициент a, при котором $z_1 + az_2$ — чисто мнимое число.

в) По правилу параллелограмма постройте сумму чисел z_1 и az_2 из пункта б).

г) Найдите действительный коэффициент a, при котором $z_1 + az_2$ — действительное число; по правилу параллелограмма постройте сумму чисел z_1 и az_2.

○**33.16.** а) Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = -3 + i$ и $z_2 = 5 + 2i$.

б) Найдите действительный коэффициент a, при котором $az_1 + z_2$ — чисто мнимое число.

в) По правилу параллелограмма постройте сумму чисел az_1 и z_2 из пункта б).

г) Найдите действительный коэффициент a, при котором $az_1 + z_2$ — действительное число; по правилу параллелограмма постройте сумму чисел az_1 и z_2.

●**33.17.** а) Для $n = 1, 2, 3, 4$ изобразите на координатной плоскости точки $z_n = (2n - 1) + (5 - n)i$;

б) докажите, что все эти точки лежат на одной прямой l; составьте уравнение прямой;

в) укажите число, лежащее на прямой l, у которого $\operatorname{Re} z = -5$;

г) укажите число, лежащее на прямой l, у которого $\operatorname{Im} z = 8$.

●**33.18.** а) Для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ изобразите на координатной плоскости точки $z_n = (n - 1) + (n^2 - 5n + 6)i$.

б) Докажите, что эти точки лежат на одной параболе; составьте уравнение параболы.

в) Найдите действительную часть суммы $z_1 + z_2 + \ldots + z_6$.

г) Укажите наименьший номер n, начиная с которого мнимая часть числа z_n будет больше 100.

●**33.19.** а) Для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ изобразите на координатной плоскости точки $z_n = (n + 1) + \frac{3}{n}i$.

б) Докажите, что все эти точки лежат на одной гиперболе; составьте уравнение гиперболы.

в) Укажите точку, наиболее близкую к оси абсцисс.

г) Укажите точку, наиболее близкую к началу координат.

Решите уравнение:

○**33.20.** а) $z\,\mathrm{Re}\,z = 1$; б) $z\,\mathrm{Re}\,z = -1$; в) $z(\mathrm{Re}\,z)^2 = 1$; г) $z(\mathrm{Re}\,z)^2 = -1$.

○**33.21.** а) $z\,\mathrm{Im}\,z = i$; б) $z\,\mathrm{Im}\,z = -i$; в) $z(\mathrm{Im}\,z)^2 = i$; г) $z(\mathrm{Im}\,z)^2 = -i$.

○**33.22.** а) $z\,\mathrm{Re}\,z = \overline{z}\,\mathrm{Im}\,\overline{z}$; б) $z\,\mathrm{Re}\,\overline{z} = \overline{z}\,\mathrm{Im}\,z$; в) $z\,\mathrm{Im}\,\overline{z} = \overline{z}\,\mathrm{Re}\,z$; г) $z\,\mathrm{Re}\,z = \overline{z}\,\mathrm{Re}\overline{z}$.

○**33.23.** а) $z\,\mathrm{Re}(z - 4) = i - 4$; б) $z\,\mathrm{Im}(z + 2i) = 7 - i$; в) $\overline{z}(\mathrm{Re}\,z - 6) = 21i - 9$; г) $\overline{z}(\mathrm{Im}\,z + 4) = 10 + 4i$.

§ 34 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Прочитайте п. 1 в § 34 учебника. 279

Найдите модуль комплексного числа:

34.1. а) $6 - 8i$; б) $20 + 21i$; в) $i(2 + i)$; г) $(3 - i)(2 + i)$.

34.2. а) $\frac{2}{i}$; б) $-\frac{3}{i}$; в) $\frac{i+1}{i}$; г) $\frac{i}{i+1}$.

○**34.3.** Для комплексных чисел $z_1 = 12 - 5i$ и $z_2 = 3 + 4i$:

а) найдите $|z_1|$ и $|z_2|$;

б) вычислите z_1z_2 и проверьте равенство $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

в) вычислите $\frac{1}{z_1}$ и проверьте равенство $\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|}$;

г) вычислите $\frac{z_1}{z_2}$ и проверьте равенство $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

34.4. Для комплексных чисел $z_1 = 3 - i$ и $z_2 = 1 + 2i$:

а) найдите $|\overline{z}_1|$ и $|\overline{z}_2|$ и проверьте равенства $|\overline{z}_1| = |z_1|$ и $|\overline{z}_2| = |z_2|$;

б) проверьте неравенство $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$;
в) вычислите $\overline{z_1 z_2}$ и проверьте равенство $|\overline{z_1 z_2}| = |\bar{z}_1| \cdot |\bar{z}_2|$;
г) проверьте неравенство $|z_1 - z_2| > |z_1| - |z_2|$.

○**34.5.** При каком положительном значении параметра a модуль данного числа равен 10:

а) $a + 8i$;
б) $2a + ai$;
в) $(a + 1) + (a - 1)i$;
г) $a + \frac{50i}{a}$?

Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих заданному условию:

34.6. а) $|z| = 3$;
б) $|z - 1| = 3$;
в) $|z + 2| = 3$;
г) $|z + 3i| = 3$.

○**34.7.** а) $|z - i| = 1$;
б) $|z + 2i| = 2$;
в) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$;
г) $|z + 4 + 3i| = 5$.

○**34.8.** Про комплексное число z известно, что $\mathrm{Re}\, z = 3$ или $\mathrm{Re}\, z = 6$. Сколько имеется таких чисел, если, кроме того, известно, что:

а) $|z| = 3$; б) $|z| = 4$; в) $|z| = 6$; г) $|z| = 10$?

○**34.9.** Про комплексное число z известно, что $\mathrm{Re}\, z = 3$ или $\mathrm{Im}\, z = 4$. Сколько имеется таких чисел, если, кроме того, известно, что:

а) $|z| = 3$; б) $|z| = 4$; в) $|z| = 5$; г) $|z| = 10$?

○**34.10.** Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих уравнению:

а) $|z| = |z - 1|$;
б) $|z - 1| = |z - 3|$;
в) $|z - 1| = |z - i|$;
г) $|z + 3i| = |z + 4|$.

283 **Прочитайте п. 2 в § 34 учебника.**

○**34.11.** Число z задано в тригонометрической форме. Укажите его стандартную тригонометрическую форму:

а) $z = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$;

б) $z = \cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}$;

в) $z = \cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}$;

г) $z = \cos\frac{101\pi}{6} + i\sin\frac{101\pi}{6}$.

Число z задано в тригонометрической форме. Укажите его стандартную тригонометрическую форму:

○**34.12.** а) $z = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}$;

б) $z = \cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$;

в) $z = \cos\frac{99\pi}{4} + i\sin\frac{99\pi}{4}$;

г) $z = \cos\left(-\frac{103\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{103\pi}{6}\right)$.

○**34.13.** а) $z = \cos(13{,}2\pi) + i\sin(13{,}2\pi)$;
б) $z = \cos(-12{,}3\pi) + i\sin(-12{,}3\pi)$;
в) $z = \cos(17\arccos(-1)) + i\sin(17\arccos(-1))$;
г) $z = \cos(2\arccos(-0{,}5)) + i\sin(2\arccos(-0{,}5))$.

Найдите аргумент комплексного числа:

34.14. а) $5i$; б) $5{,}55$; в) $-5{,}5i$; г) $-5{,}555$.

○**34.15.** а) $2 - 2i$; в) $-3 + 3i$;

б) $\left(-\sqrt{3} + i\right)^2$; г) $(-3 + 3i)^2$.

Изобразите на комплексной плоскости множество всех тех чисел, аргумент которых равен:

34.16. а) $\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{3\pi}{4}$;

б) $\frac{3\pi}{4}$ или $-\frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{3\pi}{4}$ или $\frac{\pi}{4}$.

34.17. а) $\frac{2\pi}{3}$; в) $-\frac{5\pi}{6}$;

б) $-\frac{\pi}{6}$ или $\frac{5\pi}{6}$; г) $-\frac{2\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{3}$.

○**34.18.** Изобразите на комплексной плоскости множество всех тех чисел, у которых аргумент:

а) положителен; в) больше чем $\frac{\pi}{2}$;

б) отрицателен; г) меньше чем $\frac{\pi}{4}$.

○**34.19.** Изобразите на комплексной плоскости множество всех тех чисел, у которых аргумент:

а) больше чем $\frac{\pi}{2}$, но меньше чем $\frac{3\pi}{4}$;

б) больше чем $-\frac{3\pi}{4}$, но меньше чем $\frac{\pi}{6}$;

в) больше чем $\frac{3\pi}{4}$ или меньше чем $\frac{\pi}{6}$;

г) отличается от $-\frac{2\pi}{3}$ не более чем на $\frac{\pi}{6}$.

○**34.20.** Изобразите на комплексной плоскости множество всех тех чисел z, у которых:

а) $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ и $|z| = 2$;

б) $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ и $3 < |z| < 5$;

в) $-\frac{3\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{6}$ и $|z| = 8$;

г) $-\frac{5\pi}{6} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}$ или $1 < |z| < 2$.

Запишите комплексное число в стандартной тригонометрической форме:

○**34.21.** а) 5; б) $3i$; в) -8; г) $-0{,}5i$.

○**34.22.** а) $4 + 4i$; б) $1 - i$; в) $-2 + 2i$; г) $-2 - 2i$.

34.23. а) $\sqrt{3} + i$; б) $-\sqrt{3} + i$; в) $3\sqrt{3} - 3i$; г) $-2\sqrt{3} - 2i$.

○**34.24.** а) $4 - 4\sqrt{3}i$; б) $1 + \sqrt{3}i$; в) $-2 - 2\sqrt{3}i$; г) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

○**34.25.** а) $3 - 4i$; б) $-5 + 12i$; в) $6 + 8i$; г) $-15 - 8i$.

●**34.26.** а) $\sin 35° - i\cos 35°$; б) $\sin(-23°) + i\cos(-23°)$; в) $-\sin 40° + i\cos 40°$; г) $\sin(-20°) - i\sin(-70°)$.

●**34.27.** а) $1 - \cos 100° + i\sin 100°$; б) $\sin\frac{4\pi}{7} + i\left(1 - \cos\frac{4\pi}{7}\right)$; в) $\sin\frac{6\pi}{11} + i\left(1 - \cos\frac{6\pi}{11}\right)$; г) $1 - \cos 250° + i\sin 610°$.

○**34.28.** Представьте в алгебраической форме комплексное число:

а) $5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; в) $5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

б) $\dfrac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$; г) $\dfrac{1}{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$.

Прочитайте п. 3 в § 34 учебника.

289

Выполните действия, используя правила умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме:

○**34.29.** а) $6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

б) $(-5 - 5i) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $0{,}3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) \cdot 20\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

г) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot (2 + 2\sqrt{3}i)$.

○**34.30.** а) $8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) : 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

б) $(10 + 10i) : \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)$;

в) $12\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) : 0{,}3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

г) $16\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) : (4 - 4\sqrt{3}i)$.

34.31. а) Зная, что $z = i$, изобразите на комплексной плоскости числа z, z^2, z^3, z^9, z^{99} и найдите их аргументы.

б) Зная, что $z = -i$, изобразите на комплексной плоскости числа z, z^5, z^{15}, z^{-25}, z^{-1001} и найдите их аргументы.

34.32. а) Зная, что $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, найдите z^2, запишите числа z и z^2 в тригонометрической форме, сравните модули и аргументы этих чисел, изобразите числа на комплексной плоскости.

б) Зная, что $z = 2 - 2\sqrt{3}i$, найдите z^2, запишите числа z и z^2 в тригонометрической форме, сравните модули и аргументы этих чисел, изобразите числа на комплексной плоскости.

Зная, что $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, изобразите на комплексной плоскости числа z_1, z_2, z и найдите аргумент указанного числа z:

○**34.33.** а) $z = z_1 z_2$;
б) $z = (z_1)^2 z_2$;
в) $z = z_1(z_2)^3$;
г) $z = (z_1)^5(z_2)^3$.

○**34.34.** а) $z = \frac{z_1}{z_2}$; б) $z = \frac{z_2}{z_1}$; в) $z = \frac{z_1^2}{z_2}$; г) $z = \frac{z_1^3}{z_2^5}$.

Зная, что $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, изобразите на комплексной плоскости числа z_1, z_2, z и найдите аргумент указанного числа z:

●**34.35.** а) $z = z_1 z_2$;
б) $z = (z_1)^2 z_2$;
в) $z = z_1(z_2)^5$;
г) $z = (z_1)^{11}(z_2)^{10}$.

●**34.36.** а) $z = \frac{z_1}{z_2}$; б) $z = z_1^3$; в) $z = \frac{z_1^4}{z_2^3}$; г) $z = \frac{z_1^{31}}{z_2^{33}}$.

○**34.37.** Каждое комплексное число, действительная часть которого равна −4, умножили на z. Изобразите на комплексной плоскости полученное множество чисел, если:
а) $z = i$; б) $z = -3i$; в) $z = 1 - \sqrt{3}i$; г) $z = 3 - i$.

○**34.38.** Зная, что $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 4 + 3i$, $z_3 = -1 + 7i$, изобразите на комплексной плоскости треугольник с вершинами zz_1, zz_2, zz_3, если:
а) $z = i$;
б) $z = 2i$;
в) $z = -i$;
г) $z = 1 - i$.

○**34.39.** Зная, что $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 4 + 3i$, $z_3 = -2 + 5i$, изобразите на комплексной плоскости треугольник с вершинами $\frac{z_1}{z}$, $\frac{z_2}{z}$, $\frac{z_3}{z}$, если:
а) $z = i$; б) $z = 2i$; в) $z = -i$; г) $z = 1 - i$.

●**34.40.** Для числа $z = \cos(0{,}11\pi) + i\sin(0{,}11\pi)$ укажите наименьшее натуральное число n, при котором:
а) $\arg(z^n) > \frac{\pi}{4}$;
б) $\arg(z^n) > \frac{\pi}{2}$;
в) $\arg(z^n) > \frac{5\pi}{6}$;
г) $\arg(z^n) < 0$.

●**34.41.** а) Среди корней z уравнения $\sqrt{3}(z + \overline{z})(z - \overline{z}) = 4i^9$ найдите число, аргумент которого равен $\frac{\pi}{6}$.

б) Среди корней z уравнения $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} \overline{z} = \frac{\sqrt{3}}{i^6}$ найдите число, аргумент которого равен $\frac{\pi}{3}$.

●**34.42.** а) Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z, удовлетворяющих условию $|zi - 3i + 4| \leqslant \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$. Чему равно наибольшее значение $|z|$?

б) Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z, удовлетворяющих условию $|zi - 3 - 4i| \leqslant \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$. Чему равно наименьшее значение $|z|$?

§ 35 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

○**35.1.** Найдите все действительные значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 4x + a = 0$:

а) имеет только один корень;
б) имеет два действительных корня;
в) не имеет действительных корней;
г) имеет два действительных корня разных знаков.

○**35.2.** Найдите все действительные значения параметра a, при которых уравнение $x^2 + ax + 9 = 0$:

а) имеет хотя бы один действительный корень;
б) не имеет действительных корней;
в) имеет хотя бы один отрицательный корень;
г) имеет два действительных корня, больших чем 1.

○**35.3.** Найдите все действительные значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + 8x + 16 = 0$:

а) имеет только один корень;
б) имеет действительный положительный корень;
в) имеет два действительных корня разных знаков;
г) имеет два действительных корня, сумма квадратов которых равна 1.

○**35.4.** Решите уравнение:

а) $z^2 + 144 = 0$;
б) $\frac{5z^2 - 29}{z + 3\sqrt{5}} = z - \sqrt{45}$;
в) $z^2 + 441 = 0$;
г) $\frac{3z^2 + 2004}{z - \sqrt{44}} = z + 2\sqrt{11}$.

Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

○35.5. а) i и $-i$; в) $7i$ и $-7i$;
б) $7 + 2i$ и $7 - 2i$; г) $1 + i$ и $1 - i$.

○35.6. а) $2i$ и $\frac{2}{i}$; в) $-2^{-3}i$ и $\frac{i}{8}$;
б) $1 + 3i$ и $\frac{10}{1 + 3i}$; г) $(2^9 + 2^7 + 2^3)i$ и $(3^4 - 3^6)i$.

Решите уравнение:

35.7. а) $z^2 - 2z + 2 = 0$; в) $z^2 - 6z + 25 = 0$;
б) $z^2 + 4z + 5 = 0$; г) $z^2 + 10z + 61 = 0$.

○35.8. а) $z^2 - z + 2{,}5 = 0$; в) $z^2 - 5z + 6{,}5 = 0$;
б) $z^2 + 3z + 8{,}5 = 0$; г) $z^2 + 11z + 36{,}5 = 0$.

○35.9. При каких значениях параметра a:
а) уравнение $z^2 - 2z + a = 0$ имеет корень $1 + i$;
б) уравнение $z^2 + 6z + a = 0$ имеет корень $i - 3$;
в) уравнение $z^2 - 8z + (a^2 + 9) = 0$ имеет корень $4 - 3i$;
г) уравнение $z^2 + 10z + (a^2 + 4a + 5) = 0$ имеет корень $-5 + i$?

○35.10. При каких значениях параметра a:
а) уравнение $z^2 + az + 5 = 0$ имеет корень $2 + i$;
б) уравнение $z^2 + az + 13 = 0$ имеет корень $-2 - 3i$;
в) уравнение $z^2 + (1 - a^2)z + 25 = 0$ имеет корень $4 + 3i$;
г) уравнение $z^2 + (a^2 + 2a + 2)z + 41 = 0$ имеет корень $-5 + 4i$?

○35.11. Вычислите $\sqrt{a + bi}$, решив уравнение $(x + yi)^2 = a + bi$:
а) $\sqrt{4}$; б) $\sqrt{-4}$; в) $\sqrt{9i}$; г) $\sqrt{-25i}$.

○35.12. Вычислите $\sqrt{a + bi}$, решив уравнение $(x + yi)^2 = a + bi$ или использовав формулу

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \cdot \frac{b}{|b|} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right):$$

а) $\sqrt{3 - 4i}$; в) $\sqrt{4 - 3i}$;
б) $\sqrt{3 + 4i}$; г) $\sqrt{12 + 5i}$.

○35.13. Вычислите:

а) $\sqrt{15 + 8i}$;

б) $\sqrt{15 - 8i}$;

в) $\sqrt{24 - 7i}$;

г) $\sqrt{40 + 9i}$.

35.14. Изобразите на комплексной плоскости число z и множество $\sqrt{z}$, если:

а) $|z| = 1$, $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$;

б) $|z| = 4$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$;

в) $|z| = 9$, $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$;

г) $|z| = 0{,}25$, $\arg(z) = -\frac{2\pi}{3}$.

35.15. Изобразите на комплексной плоскости число z и множество $\sqrt{z}$, если:

а) $|z| = 1$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$;

б) $|z| = 4$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$;

в) $|z| = 9$, $\arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$;

г) $|z| = 0{,}25$, $\arg(z) = -\frac{9\pi}{10}$.

●35.16. Изобразите на комплексной плоскости множество $\sqrt{z}$, если:

а) $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{2}$;

б) $|z| = 1$, $0 < \arg(z) < \pi$;

в) $|z| = 1$, $-\frac{2\pi}{3} \leqslant \arg(z) \leqslant 0$;

г) $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \pi$.

○35.17. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) $1 + i$ и $2 - i$;

б) $2 + i$ и $3 - 2i$;

в) $1 + 2i$ и $7 - 2i$;

г) $5 + 4i$ и $4 - 5i$.

○35.18. Решите уравнение:

а) $z^2 - 2iz = 0$;

б) $z^2 + 4iz = 0$;

в) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$;

г) $z^2 - 8z + 11 + 12i = 0$.

○35.19. Найдите те значения параметра a, при которых:

а) уравнение $z^2 - 2z + a = 0$ имеет корень $z = i$;

б) уравнение $z^2 - 8iz + a = 0$ имеет корень $z = 3 - i$;

в) уравнение $z^2 + 6z + a = 0$ имеет корень $z = -i$;

г) уравнение $z^2 + 10iz + a = 0$ имеет корень $z = -10 + i$.

○35.20. Найдите те значения параметра a, при которых:

а) уравнение $z^2 + az + 5 = 0$ имеет корень i;

б) уравнение $z^2 + az + 13 = 0$ имеет корень $-2i$;

в) уравнение $z^2 + az + 24i = 0$ имеет корень $1 + i$;

г) уравнение $z^2 + az + 1 + i = 0$ имеет корень $-3 + 2i$.

§ 36 ВОЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА*

303 **Прочитайте п. 1 в § 36 учебника.**

36.1. Пусть $z = 2(\cos 0{,}2\pi + i \sin 0{,}2\pi)$. Верно ли, что:

а) z^4 принадлежит первой координатной четверти;

б) z^4 принадлежит второй координатной четверти, а его модуль меньше $\sqrt{300}$;

в) z^8 принадлежит третьей координатной четверти;

г) z^8 принадлежит четвёртой координатной четверти, а его модуль больше 100?

○**36.2.** Пусть $z = 3(\cos 0{,}3\pi + i \sin 0{,}3\pi)$. Верно ли, что:

а) z^6 принадлежит первой координатной четверти;

б) z^6 принадлежит четвёртой координатной четверти, а его модуль больше 1000;

в) z^6 принадлежит четвёртой координатной четверти, а его модуль меньше 750;

г) z^{16} принадлежит второй координатной четверти?

○**36.3.** Пусть $z = \cos 0{,}19\pi + i \sin 0{,}19\pi$. Какие числа из множества $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^9, z^{10}\}$:

а) расположены выше оси абсцисс;

б) расположены правее оси ординат;

в) расположены в первой координатной четверти;

г) расположены во второй или в четвёртой координатной четверти?

○**36.4.** Пусть $z = 2(\cos 0{,}21\pi + i \sin 0{,}21\pi)$. Какие числа из множества $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^9, z^{10}\}$:

а) расположены во второй координатной четверти;

б) расположены внутри круга радиуса 500 с центром в начале координат;

в) расположены в первой координатной четверти;

г) расположены правее оси ординат и вне круга радиуса 500 с центром в начале координат?

○**36.5.** Пусть $z = \cos 0{,}17\pi + i \sin 0{,}17\pi$. Какие числа из множества $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^9, z^{10}\}$:

а) расположены выше оси абсцисс;

б) расположены правее оси ординат;

---

* В заданиях этого параграфа подразумевается, что точки координатных осей не принадлежат координатным четвертям.

в) расположены выше биссектрисы первой и третьей координатной четвертей;

г) расположены ниже биссектрисы второй и четвёртой координатной четвертей?

●**36.6.** Пусть $z = 0{,}5(\cos 0{,}23\pi + i\sin 0{,}23\pi)$. Какие числа из множества $\{z, z^2, z^3, \dots, z^9, z^{10}\}$:

а) расположены во второй координатной четверти;

б) расположены вне круга радиуса 0,2 с центром в начале координат;

в) расположены в первой координатной четверти;

г) расположены правее оси ординат и внутри круга радиуса 0,001 с центром в начале координат?

Вычислите:

36.7. а) $(\cos 15° + i\sin 15°)^8$; в) $(\cos 75° + i\sin 75°)^{10}$;
б) $(\cos 15° + i\sin 15°)^{18}$; г) $(\cos 75° + i\sin 75°)^{100}$.

○**36.8.** а) $(1 + i)^4$; в) $(1 - i)^{10}$;
б) $(1 + i)^6$; г) $(1 - i)^{20}$.

○**36.9.** а) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^3$; в) $\left(\sqrt{3} + i\right)^7$;
б) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^5$; г) $\left(\sqrt{3} - i\right)^9$.

○**36.10.** а) $(\cos 10° + i\sin 10°)^{-9}$; в) $(\cos 10° + i\sin 10°)^{-12}$;
б) $(\cos 10° - i\sin 10°)^{-3}$; г) $(\cos 80° - i\sin 80°)^{-18}$.

○**36.11.** а) $(1 + i)^{-4}$; в) $(1 - i)^{-10}$;
б) $(1 + i)^{-6}$; г) $(1 - i)^{-20}$.

○**36.12.** а) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^{-3}$; в) $\left(\sqrt{3} + i\right)^{-7}$;
б) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^{-5}$; г) $\left(\sqrt{3} - i\right)^{-9}$.

●**36.13.** а) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^7 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)^7$; в) $\left(\sqrt{3} + i\right)^5 + \left(\sqrt{3} - i\right)^5$;

б) $\dfrac{16i\left(\sin\dfrac{\pi}{3} - i\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2}{\left(\sqrt{3} + i\right)^4}$; г) $\dfrac{32i\left(\sin\dfrac{\pi}{6} + i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2}{\left(\sqrt{3} - i\right)^5}$.

●**36.14.** а) Вычислите z^{12}, если $z = 2\cos\dfrac{\pi}{8}\left(\sin\dfrac{3\pi}{4} + i + i\cos\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

б) вычислите z^{30}, если $z = 2\sin\dfrac{\pi}{12}\left(1 - \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

○**36.15.** Пусть $\{z, z^2, z^3, \dots, z^n, z^{n+1}, \dots\}$ — бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $z = \cos 0{,}2\pi + i \sin 0{,}2\pi$.

а) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит второй координатной четверти.

б) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит четвёртой координатной четверти.

в) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором $z^n = 1$.

г) Сколько в этой прогрессии различных чисел?

○**36.16.** Пусть $\{z, z^2, z^3, \dots, z^n, z^{n+1}, \dots\}$ — бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $z = \cos 0{,}03\pi + i \sin 0{,}03\pi$.

а) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит второй координатной четверти.

б) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит третьей координатной четверти.

в) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором $z^n = -1$.

г) Сколько в этой прогрессии различных чисел?

●**36.17.** Пусть $\{z, z^2, z^3, \dots, z^n, z^{n+1}, \dots\}$ — бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $z = \cos 0{,}1\pi - i \sin 0{,}1\pi$.

а) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит третьей координатной четверти.

б) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит второй координатной четверти.

в) Сколько в этой прогрессии различных чисел?

г) Найдите сумму этих различных чисел.

●**36.18.** Пусть $\{z, z^2, z^3, \dots, z^n, z^{n+1}, \dots\}$ — бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $z = \cos 0{,}01\pi - i \sin 0{,}01\pi$.

а) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит второй координатной четверти.

б) Сколько в этой прогрессии различных чисел?

в) Сколько из этих чисел лежат на осях координат?

г) Найдите сумму этих различных чисел.

●**36.19.** Пусть $z = 1 + i$. Какие числа из множества $\{z, z^2, z^3, \dots, z^{11}, z^{12}\}$ лежат:

а) на оси абсцисс;

б) правее прямой $x = 9$;

в) левее оси ординат;

г) выше прямой $y = 2$?

Прочитайте п. 2 в § 36 учебника.

306

○**36.20.** Вычислите и изобразите на комплексной плоскости:

а) $\sqrt[3]{64}$; б) $\sqrt[3]{-27}$; в) $\sqrt[3]{125i}$; г) $\sqrt[3]{-512i}$.

36.21. Произвольно отметьте на комплексной плоскости число z_0, у которого $|z_0| = 1$ и $\frac{\pi}{2} < \arg(z_0) < \pi$.

а) Изобразите корень уравнения $z^3 = z_0$, принадлежащий первой координатной четверти.

б) Изобразите корень уравнения $z^3 = z_0$, принадлежащий четвёртой координатной четверти.

в) Изобразите множество $\sqrt[3]{z_0}$.

г) Объясните, почему у уравнения $z^3 = z_0$ нет корней, расположенных в третьей четверти.

36.22. Произвольно отметьте на комплексной плоскости число z_0, у которого $|z_0| = 1$ и $-\frac{\pi}{2} < \arg(z_0) < 0$.

а) Изобразите корень уравнения $z^3 = z_0$, принадлежащий четвёртой координатной четверти.

б) Изобразите множество $\sqrt[3]{z_0}$.

в) Объясните, почему у уравнения $z^3 = z_0$ нет корней, расположенных в первой четверти.

г) Найдите площадь треугольника с вершинами в точках из пункта б).

●**36.23.** Решите уравнение:

а) $z^6 + (8 - i)z^3 + (1 + i)^6 = 0$;

б) $z^4 + (2 - 4i)z^2 - (1 - i)^6 = 0$.

●**36.24.** а) При каком действительном значении a выражение

$$\frac{a(\sin 75^\circ + i\cos 75^\circ)^{12}}{i(a + 2i)^2 - (14 - 3ai) - 2}$$

является действительным числом?

б) При каком действительном значении b выражение

$$\frac{b : (\cos 22^\circ 30' - i\sin 22^\circ 30')^{16}}{i(3i - b)^2 - (3 - 8bi) - 3}$$

является действительным числом?

7 ГЛАВА ПРОИЗВОДНАЯ

§ 37 ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

318 Прочитайте п. 1 в § 37 учебника.

37.1. Являются ли числовыми последовательностями следующие функции:

а) $y = 3x^2 + 5$, $x \in Z$;

б) $y = \sin x$, $x \in [0; 2\pi]$;

в) $y = 7 - x^2$, $x \in Q$;

г) $y = \cos \frac{x}{2}$, $x \in N$?

37.2. Приведите примеры последовательностей, заданных:

а) с помощью формулы n-го члена;

б) словесно;

в) рекуррентным способом.

37.3. Задайте последовательность аналитически и найдите её первые пять членов, если:

а) каждому натуральному числу ставится в соответствие противоположное ему число;

б) каждому натуральному числу ставится в соответствие квадратный корень из этого числа;

в) каждому натуральному числу ставится в соответствие число −5;

г) каждому натуральному числу ставится в соответствие половина его квадрата.

По заданной формуле n-го члена вычислите первые пять членов последовательности (y_n):

37.4. а) $y_n = 2n^2 - n$;

б) $y_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$;

в) $y_n = \frac{3n - 1}{2n}$;

г) $y_n = \frac{(-1)^n + 2}{3n - 2}$.

37.5. а) $y_n = 3\cos \frac{2\pi}{n}$;

б) $y_n = \operatorname{tg}\left((-1)^n \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y_n = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{n}$;

г) $y_n = \sin n\pi - \cos n\pi$.

По заданной формуле n-го члена вычислите первые пять членов последовательности (y_n):

37.6. а) $y_n = \sin\frac{n\pi}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}(2n + 1)$;

б) $y_n = \cos\frac{n\pi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(2n + 1)$;

в) $y_n = n\sin\frac{n\pi}{2} + n^2\cos\frac{n\pi}{2}$;

г) $y_n = \sin\frac{n\pi}{4} - n\cos\frac{n\pi}{4}$.

37.7. а) $y_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n^3 + 1}$; б) $y_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$.

37.8. Выпишите первые четыре члена последовательности десятичных приближений числа $\sqrt{2}$:

а) по недостатку; б) по избытку.

Выпишите первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно:

37.9. а) $x_1 = 2$, $x_n = 5 - x_{n-1}$; в) $x_1 = -1$, $x_n = 2 + x_{n-1}$;

б) $x_1 = 2$, $x_n = x_{n-1} + 10$; г) $x_1 = 4$, $x_n = x_{n-1} - 3$.

37.10. а) $x_1 = 2$, $x_n = nx_{n-1}$; в) $x_1 = -2$, $x_n = -x_{n-1}$;

б) $x_1 = -5$, $x_n = -0{,}5 \cdot x_{n-1}$; г) $x_1 = 1$, $x_n = \frac{x_{n-1}}{0{,}1}$.

37.11. а) Выпишите первые шесть членов последовательности (x_n), у которой $x_1 = 5$, $x_2 = -3$ и каждый член, начиная с третьего, равен полусумме двух предыдущих членов. Составьте рекуррентное задание последовательности.

б) Выпишите первые шесть членов последовательности (y_n), у которой $y_1 = -1$, $y_2 = 1$ и каждый член, начиная с третьего, равен утроенной сумме двух предыдущих членов. Составьте рекуррентное задание последовательности.

○37.12. Определите значения первых пяти членов последовательности и составьте формулу её n-го члена, если график последовательности представлен:

а) на рис. 64; в) на рис. 66;

б) на рис. 65; г) на рис. 67.

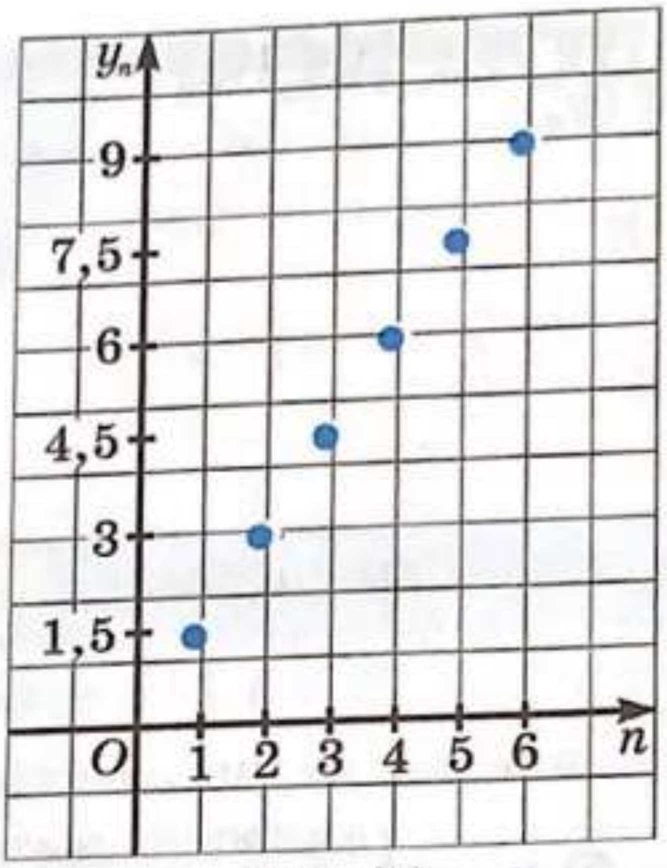


Рис. 64

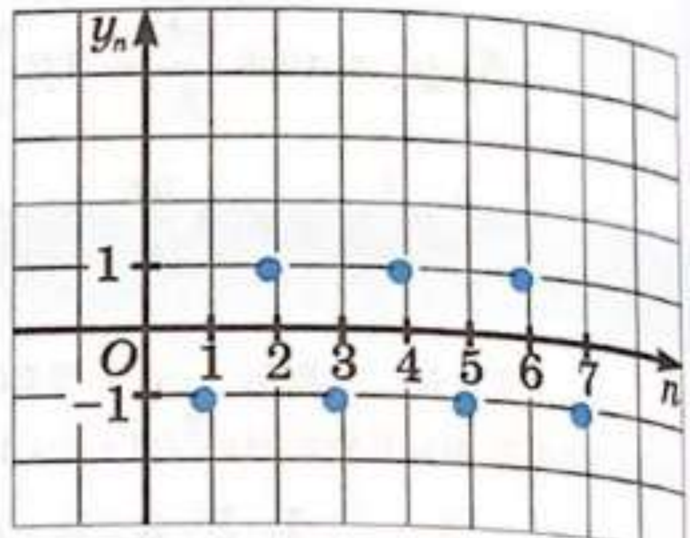


Рис. 65

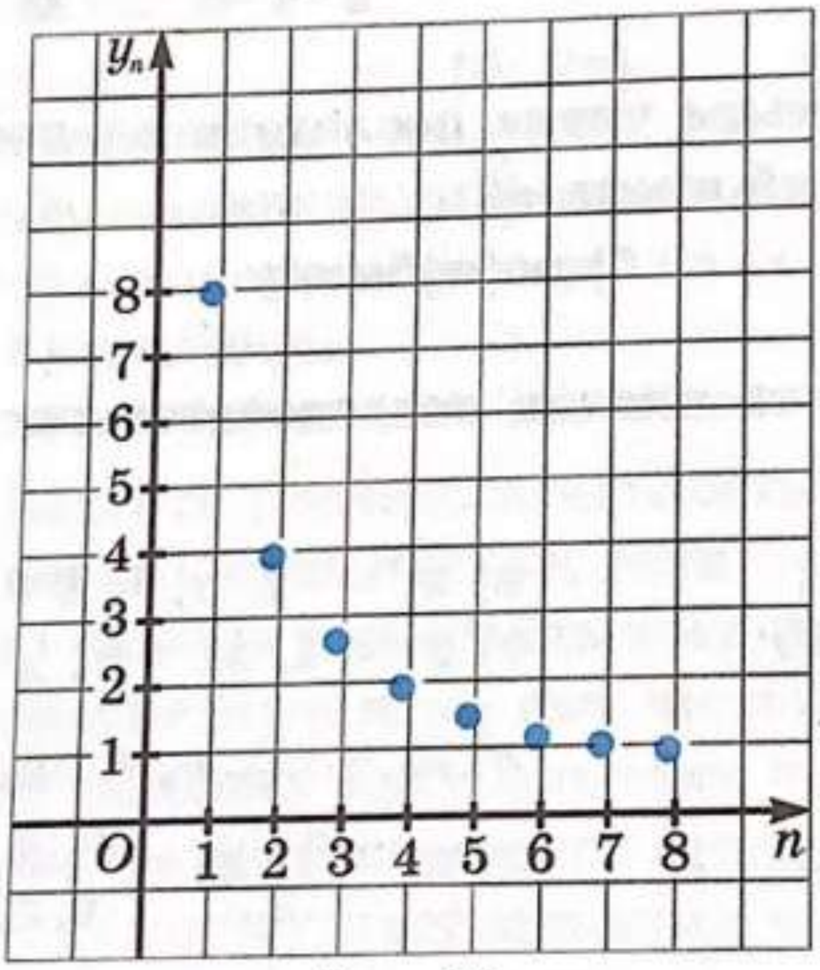


Рис. 66

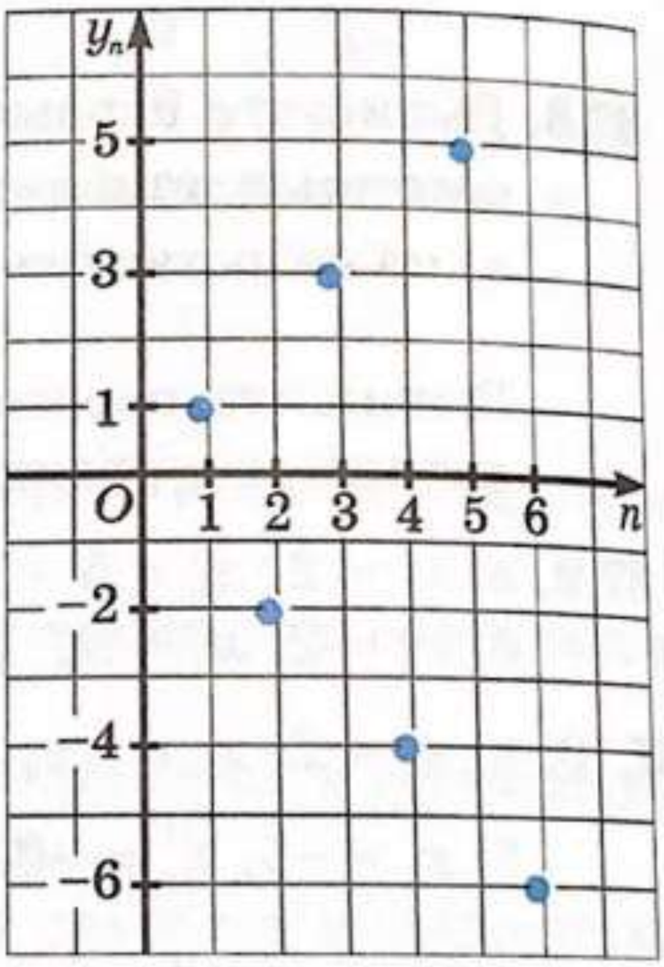


Рис. 67

Постройте график функции:

○**37.13.** а) $y = (x + 1)^{-2}$, $x \in N$; в) $y = -\dfrac{18}{x + 2}$, $x \in N$;

б) $y = 3x - x^2$, $x \in N$; г) $y = \sqrt{x + 3}$, $x \in N$.

○**37.14.** а) $y = 2 - x$, $x \in N$; в) $y = \dfrac{x + 5}{2}$, $x \in N$;

б) $y = 3x - x^2$, $x \in N$; г) $y = x^2 - 4x$, $x \in N$.

○**37.15.** а) $y = \sin\dfrac{\pi}{6}x$, $x \in N$; в) $y = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}x$, $x \in N$;

б) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}(2x + 1)$, $x \in N$; г) $y = \cos\pi x$, $x \in N$.

Постройте график последовательности:

○**37.16.** а) $y_n = 10 - n^3$;
б) $y_n = (-1)^n\sqrt{9n}$;
в) $y_n = n^3 - 8$;
г) $y_n = 4 - \sqrt{4n}$.

○**37.17.** а) $y_n = 2\sin\frac{\pi}{6}n$;
б) $y_n = (-1)^n \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(2n - 1)$.

○**37.18.** а) Все натуральные числа, кратные пяти, расположенные в порядке возрастания, образуют последовательность. Укажите седьмой, девятый, двенадцатый, n-й члены последовательности.
б) Все натуральные числа, кратные семи, расположенные в порядке возрастания, образуют последовательность. Укажите шестой, десятый, тридцать первый, n-й члены последовательности.

○**37.19.** а) Все натуральные числа, которые при делении на 5 дают в остатке 2, расположены в порядке возрастания. Найдите первые пять членов этой последовательности.
б) Все натуральные числа, которые при делении на 4 дают в остатке 3, расположены в порядке возрастания. Найдите сумму первых шести членов этой последовательности.

○**37.20.** а) Последовательность состоит из квадратов простых чисел, расположенных в порядке возрастания. Найдите сумму первых восьми членов этой последовательности. (Число 1 не считается ни простым, ни составным).
б) Известно, что (y_n) — последовательность всех натуральных степеней числа 3, расположенных в порядке возрастания. Найдите: y_5, y_8, y_{37}, y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n-3}.

○**37.21.** Задайте формулой n-го члена и рекуррентным способом:
а) возрастающую последовательность всех чётных натуральных чисел, не делящихся на 4;
б) возрастающую последовательность всех натуральных чисел, которые при делении на 13 дают в остатке 5;
в) возрастающую последовательность всех натуральных чисел, делящихся на 3 и на 7 (одновременно);
г) возрастающую последовательность всех чётных натуральных чисел, делящихся на 3 и на 5 (одновременно).

Составьте одну из возможных формул n-го члена последовательности по первым пяти её членам:

○**37.22.** а) $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$;
б) $6, 12, 18, 24, 30, \ldots$;
в) $10, 9, 8, 7, 6, \ldots$;
г) $4, 8, 12, 16, 20, \ldots$.

○**37.23.** а) 3, 9, 27, 81, 243, ... ;
б) 9, 16, 25, 36, 49, ... ;
в) 1, 8, 27, 64, 125, ... ;
г) 2, 9, 28, 65, 126, ...

○**37.24.** а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots;$

б) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \ldots;$

в) $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \ldots;$

г) $\frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 11}, \frac{1}{11 \cdot 13}, \ldots.$

○**37.25.** а) $\frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}, \frac{243}{1024}, \ldots;$

б) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4\sqrt{2}}, \ldots;$

в) $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}}, -\frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3}}, \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 4}}, -\frac{16}{\sqrt{4 \cdot 5}}, \frac{25}{\sqrt{5 \cdot 6}}, \ldots;$

г) $\frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3}, -\frac{9}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \frac{14}{3 \cdot 4 \cdot 5}, -\frac{19}{4 \cdot 5 \cdot 6}, \frac{24}{5 \cdot 6 \cdot 7}, \ldots.$

37.26. Какие члены последовательности (y_n) расположены между членами:
а) y_{732} и y_{745};
б) y_{n-1} и y_{n+2};
в) y_{998} и y_{1003};
г) y_{2n-2} и y_{2n+3}?

○**37.27.** Укажите номер члена последовательности $y_n = \frac{2-n}{5n+1}$, равного:
а) 0; б) $\frac{-3}{26}$; в) $\frac{-1}{6}$; г) $-\frac{43}{226}$.

○**37.28.** Квадрат со стороной 1 см вписан во второй квадрат таким образом, что вершины первого квадрата являются серединами сторон второго. Второй квадрат, аналогично, вписан в третий квадрат и т. д. Получается последовательность вписанных друг в друга квадратов.
а) Составьте последовательность периметров полученных квадратов. Выпишите первые пять членов этой последовательности.
б) Составьте последовательность площадей полученных квадратов. Выпишите первые пять членов этой последовательности.
в) Чему равна длина стороны одиннадцатого квадрата?
г) Чему равна площадь семнадцатого квадрата?

37.29. Сколько членов последовательности $y_n = 2n^2 - 7n + 5$ принадлежит:

а) отрезку [2; 5];   б) промежутку $(-\infty; 10)$?

Начиная с какого номера все члены последовательности (x_n) будут больше заданного числа A?

37.30. а) $x_n = 3n - 2$, $A = 15$;   б) $x_n = 5^{n-1}$, $A = 125$.

37.31. а) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n + 3$, $A = 28$;

б) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 7x_n$, $A = 285$.

37.32. Сколько членов последовательности не превосходят 1:

а) $\frac{1}{3125}, \frac{1}{625}, \frac{1}{125}, \ldots$;   в) $\frac{2}{729}, \frac{2}{243}, \frac{2}{81}, \ldots$;

б) $\frac{6}{377}, \frac{11}{379}, \frac{16}{381}, \ldots$;   г) $\frac{2}{219}, \frac{9}{222}, \frac{16}{225}, \ldots$?

37.33. Выпишите все отрицательные члены последовательности:

а) $y_n = n^2 - n - 6$;   в) $y_n = n^2 - 6n + 8$;

б) $y_n = \frac{-181}{15 - 7n}$;   г) $y_n = \frac{1 + 2n}{9n - 5}$.

37.34. Найдите число положительных членов последовательности:

а) $y_n = 4n - n^2$;   в) $y_n = -n^2 + 9n - 14$;

б) $y_n = \frac{140 - n^2}{6n - 11}$;   г) $y_n = \frac{123}{147 - 5n}$.

37.35. Найдите наименьший член последовательности:

а) $y_n = n^2 - 42n + 13$;   б) $y_n = n^2 - 26n + 41$.

37.36. Укажите номер наибольшего члена последовательности:

а) $y_n = 303 + 38n - n^2$;   б) $y_n = 145 + 32n - n^2$.

37.37. Найдите номер члена последовательности $y_n = \frac{3n + 191}{3n + 2}$, наиболее близкого к числу:

а) 25;   б) 2;   в) 5;   г) 41.

37.38. Дана последовательность $y_n = n^2 - 18n$.

а) Установите, сколько в ней отрицательных членов;

б) найдите наименьший член последовательности;

в) укажите номер члена последовательности, который равен 19;

г) выясните, сколько членов последовательности принадлежит отрезку [−15; 2].

●37.39. Найдите наименьший член последовательности:

а) $y_n = 3n^2 - 10n + 3$;

б) $y_n = \frac{-3}{2n - 5}$;

в) $y_n = 2n^2 - 7n + 3$;

г) $y_n = \frac{-4}{n + 4}$.

●37.40. Найдите наибольший член последовательности:

а) $y_n = -2n^2 + 11n - 2$;

б) $y_n = \frac{3}{2n - 5}$;

в) $y_n = 20 - 12n - 3n^2$;

г) $y_n = \frac{4}{n + 4}$.

321 **Прочитайте п. 2 в § 37 учебника.**

○37.41. Является ли ограниченной снизу последовательность:

а) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$;

б) $y_n = \frac{n^2}{n + 1}$;

в) $5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, \ldots$;

г) $y_n = ((-1)^n + 1)n^2$?

○37.42. Является ли ограниченной сверху последовательность:

а) $x_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$;

б) $1, -1, 1, -2, 1, -3, \ldots$;

в) $x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$;

г) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$?

○37.43. Является ли ограниченной последовательность:

а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

б) $-2, 3, -4, 5, \ldots, (-1)^n(n + 1), \ldots$;

в) $\frac{\sin 1}{1}, -\frac{\sin 2}{2}, \frac{\sin 3}{3}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}\sin n}{n}, \ldots$;

г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}, \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}, \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}, \ldots, \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(2n - 1), \ldots$?

●37.44. Известно, что (x_n) — ограниченная последовательность. Является ли ограниченной последовательность:

а) $y_n = -5x_n + 2$;

б) $p_n = \frac{x_n^2}{x_n^2 + 1}$;

в) $z_n = \frac{1}{2|x_n| + 1}$;

г) $t_n = x_n \sin(3n)$?

○37.45. При каких значениях параметра p заданная последовательность ограничена сверху числом 1:

а) $y_n = \frac{2n + p}{2n + 1}$;

б) $z_n = \frac{n}{p^2 + n}$?

○37.46. При каких значениях параметра p заданная последовательность ограничена снизу числом 1:

а) $y_n = \frac{n - p}{n + 2}$;

б) $z_n = \frac{2n + 9}{2n + p^2}$?

●37.47. При каких значениях параметра p последовательность:

а) $y_n = \frac{2n + p}{3n - 1}$ ограничена сверху числом 1;

б) $y_n = \frac{p + 5n}{3n + 1}$ ограничена снизу числом 1?

37.48. Определите, является последовательность (x_n) убывающей или возрастающей:

а) $x_n = 3n + 2$;

б) $x_n = \frac{5}{n + 3}$;

в) $x_n = 6^{1-n}$;

г) $x_n = \left(-\frac{1}{5}\right)^{2n-1}$.

37.49. Объясните, является последовательность (y_n) убывающей или возрастающей, если для любого номера n выполняется неравенство:

а) $y_{n+1} - y_n > 0$;

б) $\frac{y_{n+1}}{y_n} < 1$ $(y_n > 0)$;

в) $y_{n+1} - y_n < 0$;

г) $\frac{y_{n+1}}{y_n} < 1$ $(y_n < 0)$.

○37.50. Выясните, какие из приведённых последовательностей являются монотонными; укажите характер монотонности:

а) $y_n = 5^{-n}$;

б) $y_n = \cos\frac{\pi}{n + 5}$;

в) $y_n = \frac{2}{3n + 1}$;

г) $y_n = \sqrt{n + 8}$.

○37.51. Исследуйте на монотонность последовательность:

а) $y_n = -2n + 1$;

б) $y_n = 3n^2 + n - 1$;

в) $y_n = \cos\frac{1}{n}$;

г) $y_n = \frac{n}{n^2 + 1}$.

●37.52. Докажите, что заданная последовательность возрастает:

а) $y_n = n^3 + 2n$;

б) $y_n = \frac{n^2}{n^2 + 10}$;

в) $y_n = \frac{n + 1}{n + 7}$;

г) $y_n = \frac{n^4 + 3n^2 + 1}{n^4 + 3n^2 + 6}$.

●37.53. Докажите, что заданная последовательность убывает:

а) $y_n = \frac{3n + 5}{3n - 1}$;

б) $y_n = \frac{1}{n^3 + 2n}$;

в) $y_n = \frac{n^2 + 15}{n^2 + 2}$;

г) $y_n = \frac{n^4 + 2n^2 + 7}{n^2 + 2n^2 - 1}$.

○**37.54.** Если (x_n) — возрастающая последовательность с положительными членами, то что можно сказать о монотонности последовательности (y_n):

а) $y_n = 5x_n + 7$;

б) $y_n = \frac{7}{3 + x_n}$;

в) $y_n = 2 - 3x_n$;

г) $y_n = (x_n)^2 + 2$?

○**37.55.** При каких значениях параметра p последовательность (y_n) будет возрастающей:

а) $y_n = pn - 5$;

б) $y_n = -\frac{p - 1}{n}$;

в) $y_n = 2 - pn$;

г) $y_n = \frac{p + 2}{n + 1}$?

○**37.56.** При каких значениях параметра p последовательность (y_n) будет убывающей:

а) $y_n = \frac{2}{pn}$;

б) $y_n = \frac{pn + 2}{pn + 3}$;

в) $y_n = \frac{p}{\sin \frac{1}{n}}$;

г) $y_n = \frac{5n^2 - p}{n^2}$?

○**37.57.** Дана последовательность $x_n = n^2 - 1$. Исследуйте на ограниченность и монотонность последовательность (y_n):

а) $y_n = x_n$;

б) $y_n = x_{n+1} - x_n$;

в) $y_n = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}$;

г) $y_n = \frac{1}{x_{n+1}}$.

○**37.58.** Исследуйте последовательность (x_n) на ограниченность и монотонность:

а) $x_n = \frac{n}{n + 2}$;

б) $x_n = \frac{n^2 + 1}{n^2}$.

○**37.59.** Приведите примеры последовательностей:

а) возрастающих и ограниченных снизу;

б) возрастающих и не ограниченных сверху;

в) убывающих и ограниченных снизу;

г) убывающих и не ограниченных снизу.

●**37.60.** Приведите пример последовательности:

а) возрастающей, ограниченной сверху, все члены которой положительные числа;

б) убывающей, все члены которой принадлежат интервалу $(0; 7)$;

в) возрастающей, имеющей ровно три отрицательных члена;

г) неограниченной, немонотонной.

§ 38 ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Прочитайте п. 1 в § 38 учебника.

327

38.1. Запишите окрестность точки a радиуса r в виде интервала, если:

а) $a = 0$, $r = 0{,}1$;
б) $a = -3$, $r = 0{,}5$;
в) $a = 2$, $r = 1$;
г) $a = 0{,}2$, $r = 0{,}3$.

38.2. Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал:

а) $(1, 3)$;
б) $(-0{,}2, 0{,}2)$;
в) $(2{,}1, 2{,}3)$;
г) $(-7, -5)$?

38.3. Принадлежит ли точка x_1 окрестности точки a радиуса r, если:

а) $x_1 = 1$, $a = 2$, $r = 0{,}5$;
б) $x_1 = 1{,}1$, $a = 1$, $r = 0{,}2$;
в) $x_1 = -0{,}2$, $a = 0$, $r = 0{,}3$;
г) $x_1 = 2{,}75$, $a = 2{,}5$, $r = 0{,}3$?

○**38.4.** Существует ли номер n_0, начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса $r = 0{,}1$, если:

а) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $a = 0$;
б) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $a = 1$;
в) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $a = 0$;
г) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $a = 1$?

Укажите номер n_0 того члена последовательности (x_n), начиная с которого все члены последовательности попадут в окрестность точки a радиуса r:

○**38.5.** а) $x_n = \dfrac{1}{2n}$, $a = 0$, $r = 0{,}1$;

б) $x_n = 3 + \dfrac{1}{n^2}$, $a = 3$, $r = 0{,}2$;

в) $x_n = 1 + \dfrac{2}{n^2}$, $a = 1$, $r = 0{,}01$;

г) $x_n = -\dfrac{3}{n}$, $a = 0$, $r = 0{,}1$.

○**38.6.** а) $x_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $a = 0$, $r = \dfrac{1}{27}$;

б) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{2^n}$, $a = 0$, $r = \dfrac{1}{64}$;

в) $x_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $a = 2$, $r = \frac{1}{128}$;

г) $x_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $a = 3$, $r = \frac{1}{81}$.

Постройте график последовательности (y_n) и составьте, если можно, уравнение горизонтальной асимптоты графика:

○**38.7.** а) $y_n = \frac{2}{n}$;
б) $y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$;
в) $y_n = \frac{4}{n}$;
г) $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

○**38.8.** а) $y_n = -1 + \frac{1}{n}$;
б) $y_n = 2 - \frac{1}{n^2}$;
в) $y_n = 2 - \frac{2}{n}$;
г) $y_n = -3 + \frac{1}{n^2}$.

○**38.9.** а) $y_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{n}$;
б) $y_n = (-1)^n 2 + \frac{1}{n}$;
в) $y_n = -3 + (-1)^n \frac{2}{n}$;
г) $y_n = (-1)^{n+1} \cdot 3 - \frac{2}{n}$.

38.10. Верно ли утверждение:
а) если последовательность имеет предел, то она монотонна;
б) если последовательность монотонна, то она имеет предел;
в) если последовательность ограничена, то она имеет предел;
г) если последовательность не монотонна, то она не имеет предела?

332 **Прочитайте п. 2 и теорему Вейерштрасса в § 38 учебника.**

Пользуясь теоремой о пределе монотонной ограниченной последовательности, докажите, что последовательность имеет предел:

○**38.11.** а) $x_n = \frac{3n^2 + 2}{n^2}$;
б) $x_n = \frac{n^2 - 5}{n^2 + 5}$.

●**38.12.** а) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}$;
б) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$.

333

Прочитайте п. 3 в § 38 учебника.

Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

38.13. а) $x_n = \dfrac{5}{n^2}$; в) $x_n = \dfrac{-15}{n^2}$;

б) $x_n = \dfrac{-17}{n^3}$; г) $x_n = \dfrac{3}{\sqrt{n}}$.

○**38.14.** а) $x_n = \dfrac{7}{n} + \dfrac{8}{\sqrt{n}} + \dfrac{9}{n^3}$; в) $x_n = \dfrac{3}{n} + \dfrac{7}{n^2} - \dfrac{5}{n^3} + \dfrac{13}{n^4}$;

б) $x_n = 6 - \dfrac{7}{n^2} - \dfrac{3}{n} - \dfrac{3}{\sqrt{n}}$; г) $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{\sqrt{n}} - 4 + \dfrac{7}{n^2}$.

○**38.15.** а) $x_n = \dfrac{5}{2^n}$; в) $x_n = 7 \cdot 3^{-n}$;

б) $x_n = \dfrac{1}{2} \cdot 5^{-n}$; г) $x_n = \dfrac{4}{3^{n+1}}$.

○**38.16.** а) $x_n = \dfrac{5n+3}{n+1}$; в) $x_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$;

б) $x_n = \dfrac{7n-5}{n+2}$; г) $x_n = \dfrac{2n+1}{3n-1}$.

○**38.17.** а) $x_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$; в) $x_n = \dfrac{3-n^2}{n^2}$;

б) $x_n = \dfrac{1+2n+n^2}{n^2}$; г) $x_n = \dfrac{3n-4-2n^2}{n^2}$.

○**38.18.** а) $x_n = \dfrac{(2n+1)(n-3)}{n^2}$; в) $x_n = \dfrac{(3n-2)(2n+3)}{n^2}$;

б) $x_n = \dfrac{(3n+1)(4n-1)}{(n+1)^2}$; г) $x_n = \dfrac{(1-2n)(1+n)}{(n+2)^2}$.

○**38.19.** а) $x_n = \dfrac{(2n+1)(3n-4)-6n^2+12n}{n+5}$;

б) $x_n = \dfrac{n^2(2n+5)-2n^3+5n^2-13}{n(n+1)(n-7)+1-n}$;

в) $x_n = \dfrac{(1-n)(n^2+1)+n^3}{n^2+2n}$;

г) $x_n = \dfrac{n(7-n^2)+n^3-3n-1}{(n+1)(n+2)+2n^2+1}$.

Вычислите:

●38.20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

●38.21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n+3\cdot 4^n}{2^n-6\cdot 4^n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5^n-7\cdot 4^n}{2^n+6\cdot 5^n}$.

335 **Прочитайте п. 4 в § 38 учебника.**

38.22. Найдите сумму геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 3,\ q = \frac{1}{3}$; в) $b_1 = -1,\ q = 0{,}2$;

б) $b_1 = -5,\ q = -0{,}1$; г) $b_1 = 2,\ q = -\frac{1}{3}$.

38.23. Найдите сумму геометрической прогрессии:

а) $32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ \ldots$; в) $27,\ 9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \ldots$;

б) $24,\ -8,\ \frac{8}{3},\ -\frac{8}{9},\ \ldots$; г) $18,\ -6,\ 2,\ -\frac{2}{3},\ \ldots$.

38.24. Найдите знаменатель и сумму геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = -2,\ b_2 = 1$; в) $b_1 = 7,\ b_2 = -1$;

б) $b_1 = 3,\ b_2 = \frac{1}{3}$; г) $b_1 = -20,\ b_2 = 4$.

38.25. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 2,\ b_1 = 3$; в) $S = -\frac{9}{4},\ b_1 = -3$;

б) $S = -10,\ b_1 = -5$; г) $S = 1{,}5,\ b_1 = 2$.

38.26. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 10,\ q = 0{,}1$; в) $S = 6,\ q = -0{,}5$;

б) $S = -3,\ q = -\frac{1}{3}$; г) $S = -21,\ q = \frac{1}{7}$.

○**38.27.** Найдите n-й член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 15,\ q = -\frac{1}{3},\ n = 3$; в) $S = 20,\ b_1 = 22,\ n = 4$;

б) $S = -20,\ b_1 = -16,\ n = 4$; г) $S = 21,\ q = \frac{2}{3},\ n = 3$.

С38.28. Найдите сумму геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_n = \frac{25}{3^n}$;

б) $b_n = (-1)^n \frac{13}{2^{n-1}}$;

в) $b_n = \frac{45}{3^n}$;

г) $b_n = (-1)^{n-1} \frac{7}{6^{n-2}}$.

С38.29. а) Найдите сумму геометрической прогрессии, если известно, что сумма первого и третьего её членов равна 29, а второго и четвёртого — 11,6.

б) Чему равен пятый член геометрической прогрессии, если известно, что он в 4 раза меньше куба третьего члена прогрессии, а сумма прогрессии равна 4,5?

С38.30. а) Найдите геометрическую прогрессию, если известно, что её сумма равна 24, а сумма первых трёх членов равна 21.

б) Найдите седьмой член геометрической прогрессии, если известно, что её сумма равна 31,25, а сумма первых трёх членов равна 31.

С38.31. а) Составьте геометрическую прогрессию, если известно, что её сумма равна 18, а сумма квадратов её членов равна 162.

б) Найдите сумму квадратов членов геометрической прогрессии, если известно, что её сумма равна 2, а сумма кубов её членов равна $1\frac{1}{7}$.

Вычислите:

С38.32. а) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$;

б) $49 + 7 + 1 + \frac{1}{7} + \dots$;

в) $\frac{3}{2} - 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \dots$;

г) $125 + 25 + 5 + 1 + \dots$.

С38.33. а) $-6 + \frac{2}{3} - \frac{2}{27} + \frac{2}{243} - \dots$;

б) $3 + \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$;

в) $49 - 14 + 4 - \frac{8}{7} + \dots$;

г) $4 + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + \dots$.

С38.34. а) $2 + 4 + 6 + \dots + 20 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$;

б) $1 + 3 + 5 + \dots + 99 + \frac{2}{5} - \frac{4}{25} + \frac{8}{125} - \dots$;

в) $21 + 24 + 27 + ... + 51 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - ...;$

г) $1 + 4 + 7 + ... + 100 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + ...$

○**38.35.** Найдите сумму $\left(x \neq \frac{\pi n}{2}\right)$:

а) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + ...;$
б) $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \cos^4 x + ...;$
в) $\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \cos^8 x + ...;$
г) $1 - \sin^3 x + \sin^6 x - \sin^9 x + ...$

Решите уравнение, если известно, что $|x| < 1$:

○**38.36.** а) $x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + ... = 4;$

б) $2x - 4x^2 + 8x^3 - 16x^4 + ... = \frac{3}{8}.$

●**38.37.** а) $\frac{1}{x} + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + ... = \frac{7}{2};$

б) $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ... = \frac{13}{6}.$

●**38.38.** Решите уравнение:
а) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + ... + \sin^n x + ... = 5;$
б) $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - ... + (-1)^{n-1} \cos^n x + ... = 2;$
в) $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + ... + (\sin x)^{2n-2} + ... = \frac{4}{3};$
г) $7\cos^3 x + 7\cos^6 x + ... + 7(\cos x)^{3n} + ... = 1.$

§ 39 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

338 **Прочитайте п. 1 в § 39 учебника.**

39.1. Какая из функций, графики которых изображены на рисунках 68—71, имеет предел при $x \to +\infty$? при $x \to -\infty$? при $x \to \infty$?

39.2. Выясните, имеет ли функция $y = f(x)$ предел при $x \to +\infty$, при $x \to -\infty$ или при $x \to \infty$ и чему он равен, если:
а) прямая $y = 3$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $(-\infty; 4]$;
б) прямая $y = -2$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $[-6; +\infty)$;
в) прямая $y = -5$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $(-\infty; 3]$;
г) прямая $y = 5$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $[4; +\infty)$.

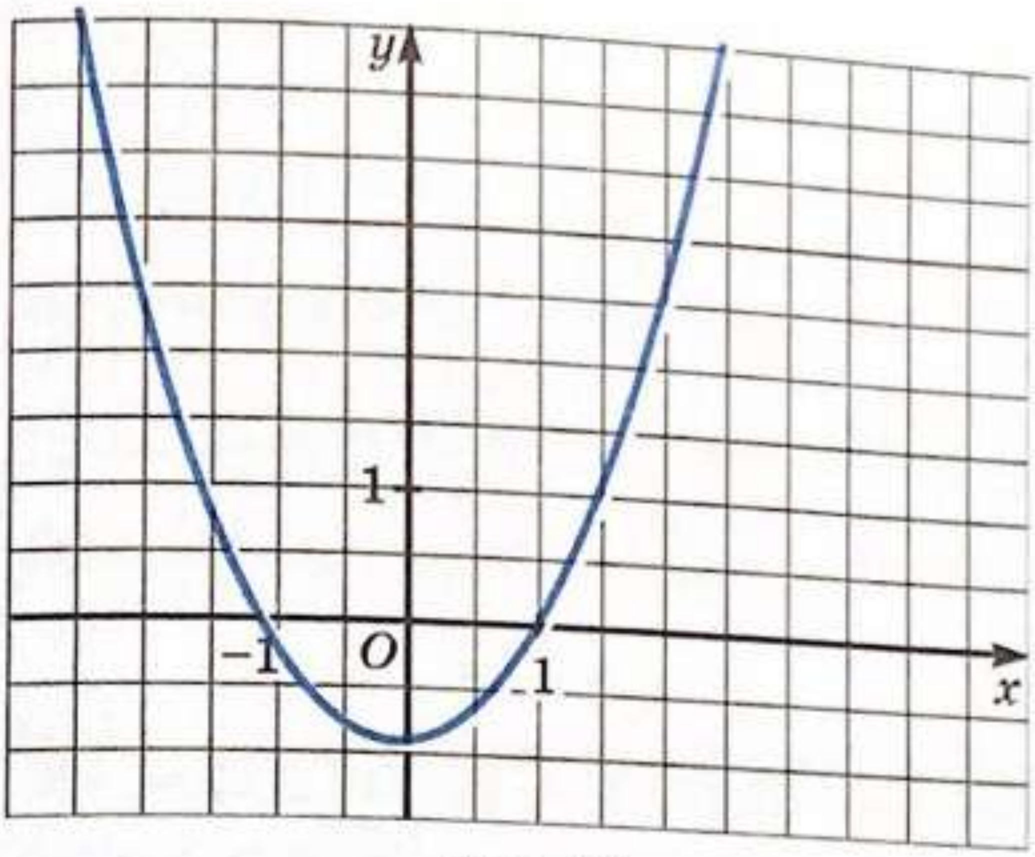


Рис. 68

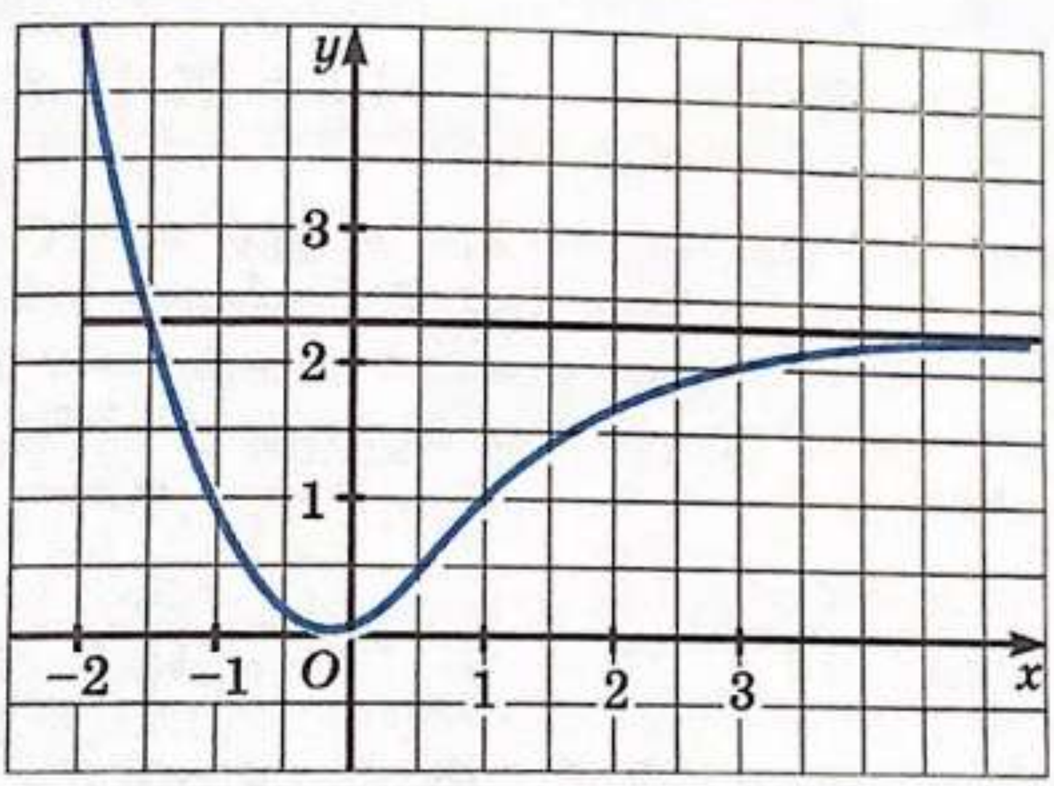


Рис. 69

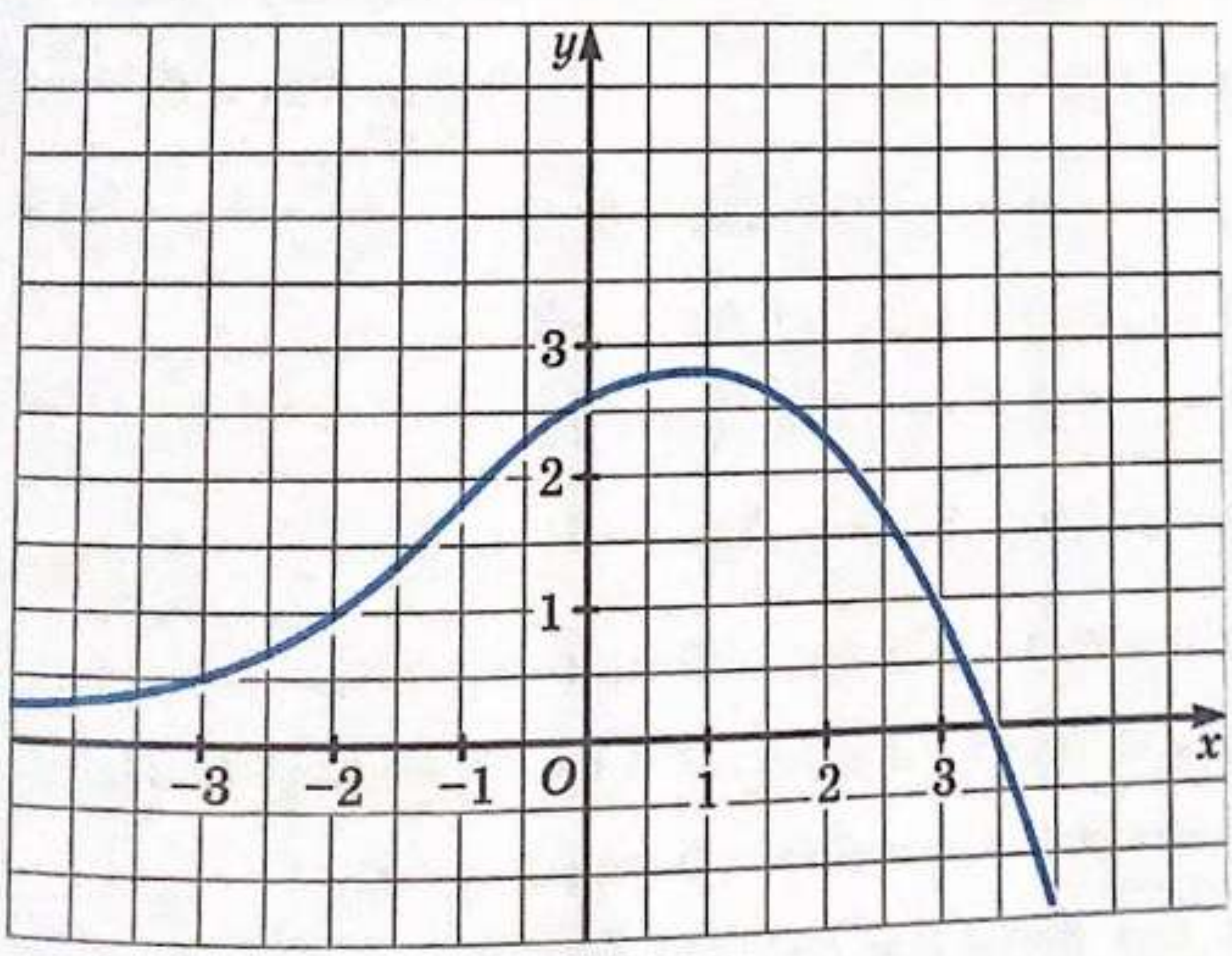


Рис. 70

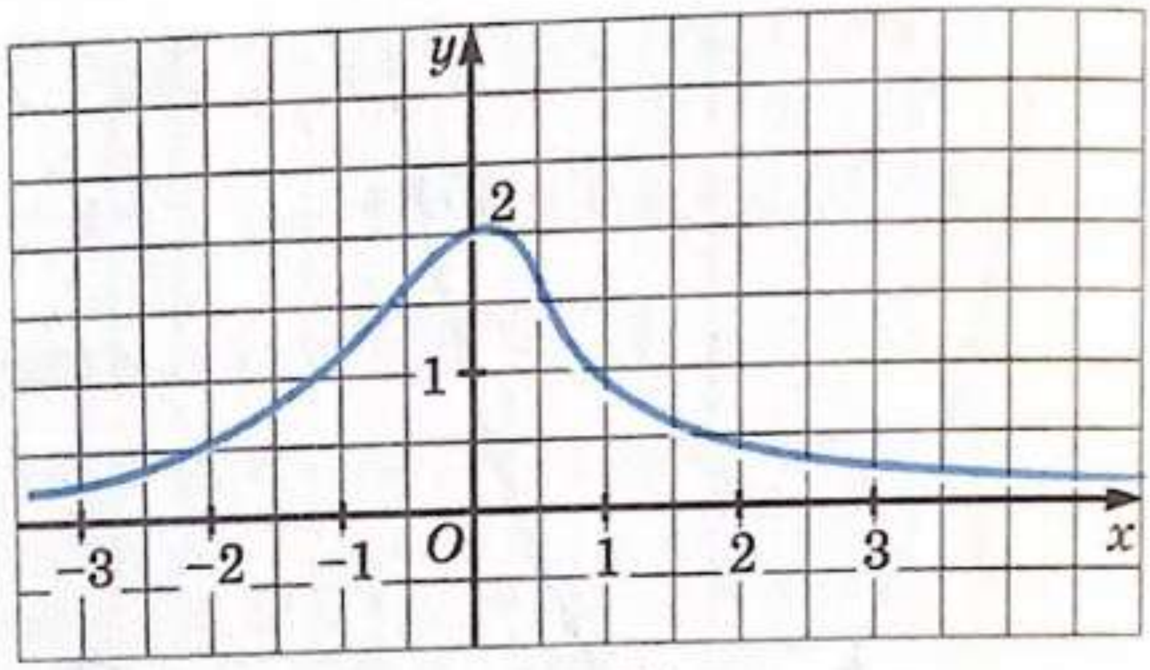


Рис. 71

39.3. Известно, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 9$.

Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + g(x) - h(x))$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} (g(x) \cdot (f(x))^2)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} (g(x) - f(x) + h(x))$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))$.

39.4. Известно, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -10$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 6$.

Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3f(x) + h(x)}{2g(x) + 15}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)h(x)}{g(x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3g(x)}{5h(x)}$.

Постройте график какой-либо функции $y = f(x)$, обладающей указанными свойствами:

39.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -5$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

39.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 10$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -4$.

39.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$ и $f(x) > 0$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$ и $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[-7; 3]$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ и $f(x) > 0$ на $[0; +\infty)$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ и $f(x) < 0$ на $(-\infty; +\infty)$.

Постройте график какой-нибудь функции $y = h(x)$, $x \in R$, обладающей указанными свойствами:

○39.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 4$ и функция возрастает;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 5$ и функция убывает;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -2$ и функция возрастает;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = -3$ и функция убывает.

○39.9. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$ и функция ограничена сверху;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 1$ и функция ограничена снизу;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 1$ и функция ограничена сверху;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$ и функция ограничена снизу.

●39.10. Постройте график непрерывной на $(-\infty; +\infty)$ функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$; $f(x) > 0$ на $(-\infty; 0)$; $E(f) = [-5; 5]$, функция убывает на $[2; 7]$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $E(f) = [-3; 5)$, $f(x) < 0$ на $(0; +\infty)$, функция возрастает на $[3; +\infty)$ и убывает на $[0; 3]$.

Вычислите:

39.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7}{x^5} - \frac{2}{x^3}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9}{x^3} - \frac{5}{x^7}\right)$.

39.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^9} + 1\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x^5} + \frac{4}{x^2} + 9\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x^3} - \frac{7}{x} - 21\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7}{x^2} - 7\right)$.

○39.13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(12 - \frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{16}{x^7}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3} + 1\right)\cdot\left(-\frac{8}{x^2} - 2\right)$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(4 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \frac{2}{x^5}$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{7}{x^6} - 2\right) \cdot \left(-\frac{6}{x^{10}} - 3\right)$.

○**39.14.** а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x - 2}$;
в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - 4}{x + 3}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - 4}{2x + 7}$;
г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x + 9}{6x - 1}$.

○**39.15.** а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 7x + 5}$;
в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5 - 5x}{2x^2 - 9x}$;
г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x + 3}{12x^2 - 6x}$.

○**39.16.** а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x - x^2 + 1}{5x^2 - 2x}$;
в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - 2x^2 + 4}{3x^2 + 2x}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 8}{x^3 + 18}$;
г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^4 + 2x + 1}$.

○**39.17.** а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 9}{x^2 + 2}$;
в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 8}{x^2 - 1}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{12x^2 + 5x + 2}{6x^2 + 5x - 1}$;
г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x^2 + 4x - 3}{5x^2 + 2x + 1}$.

341 **Прочитайте п. 2 в § 39 учебника.**

39.18. Какая из функций, графики которых изображены на рисунках 72—79, имеет предел при $x \to 3$? Чему равен этот предел?

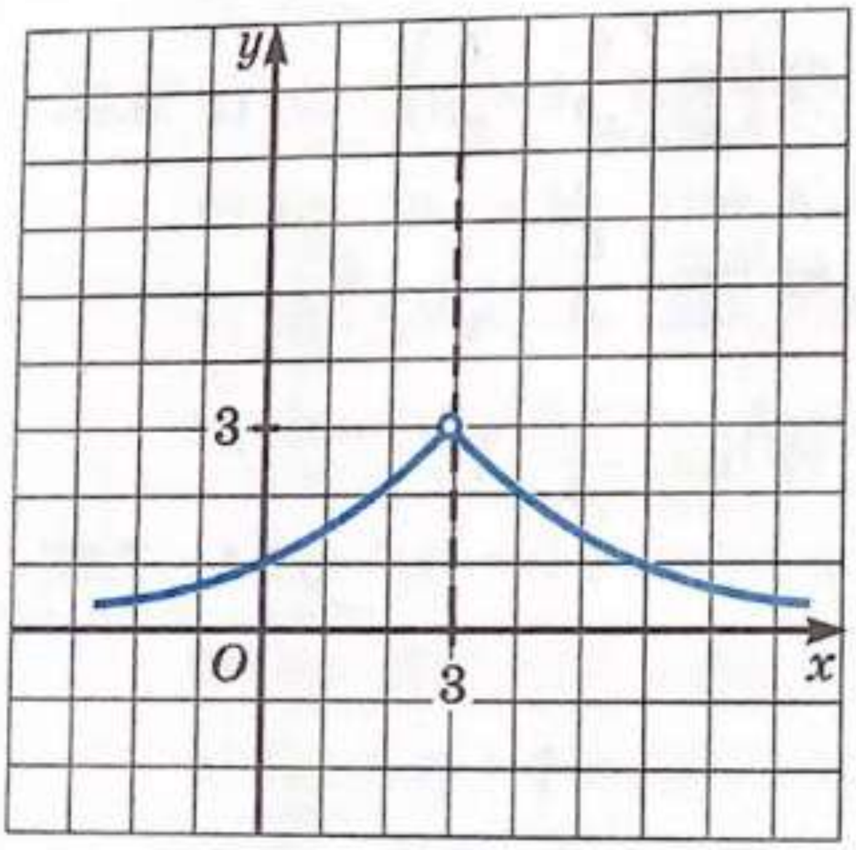


Рис. 72

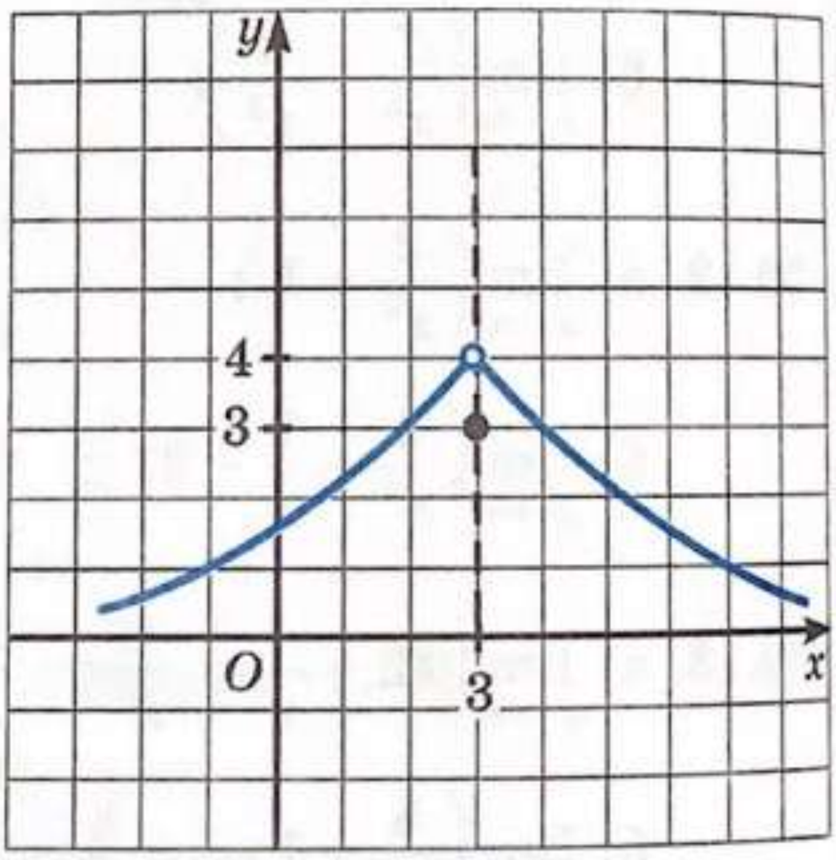


Рис. 73

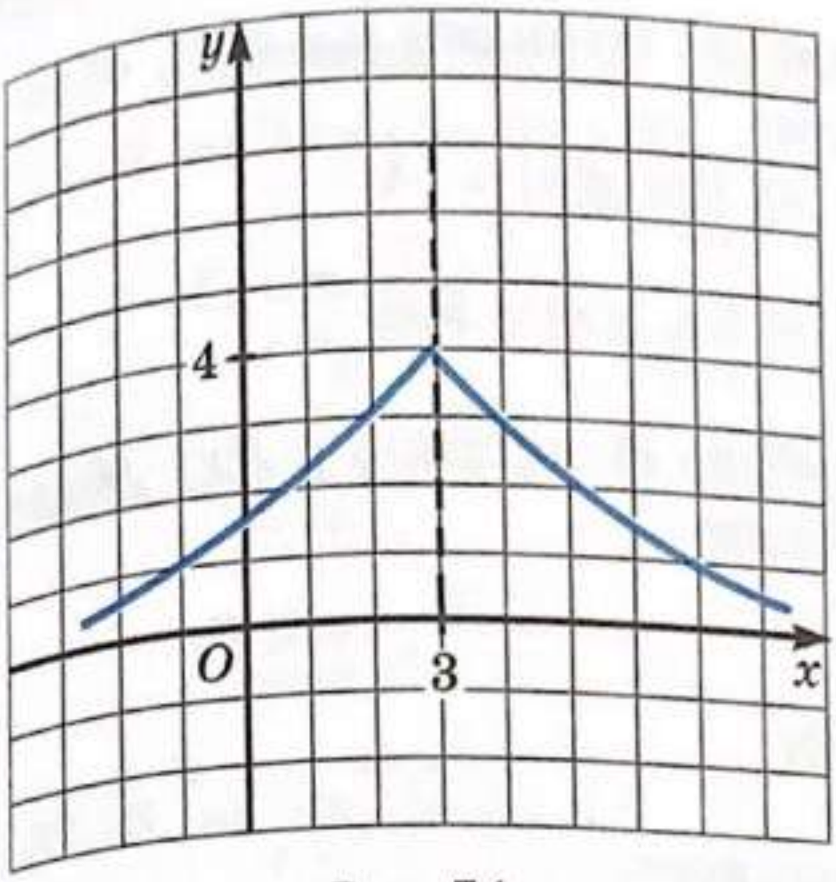


Рис. 74

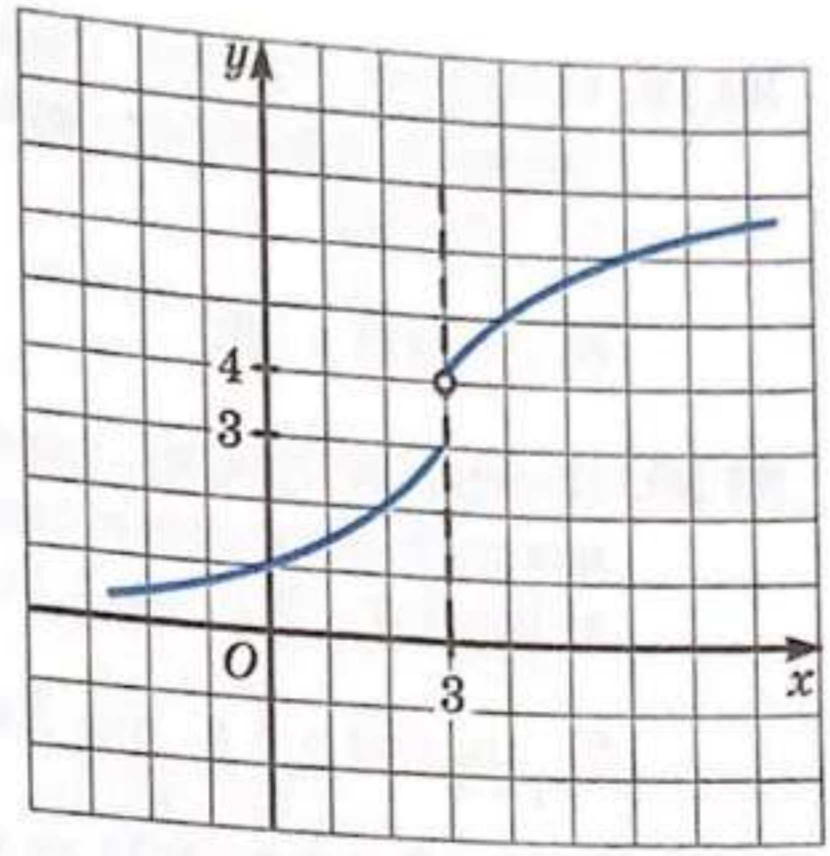


Рис. 75

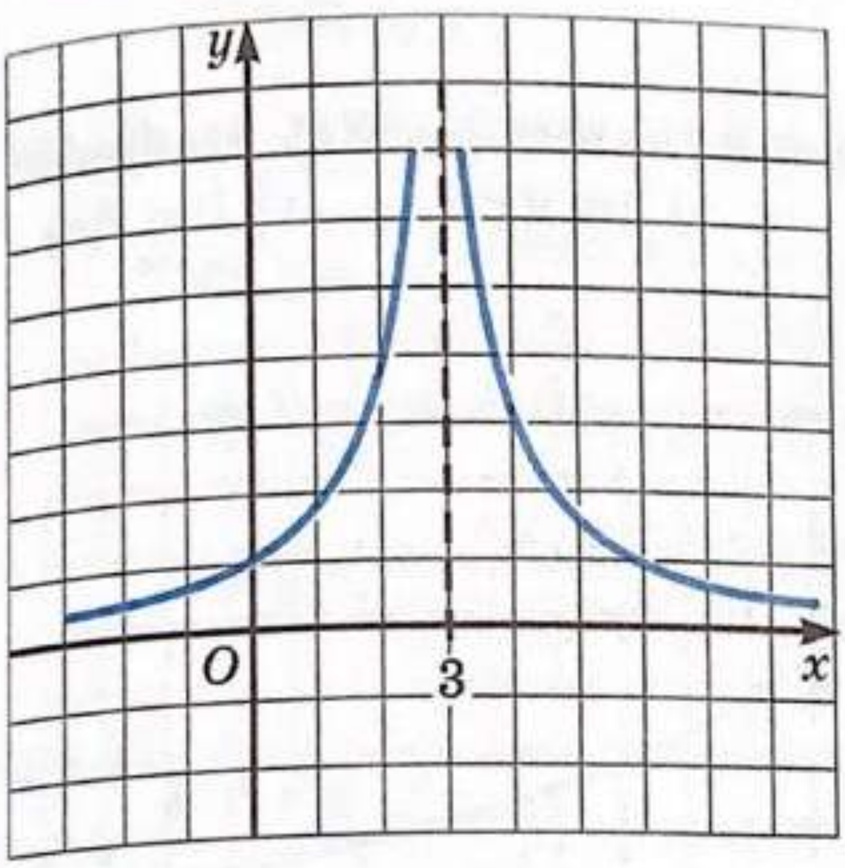


Рис. 76

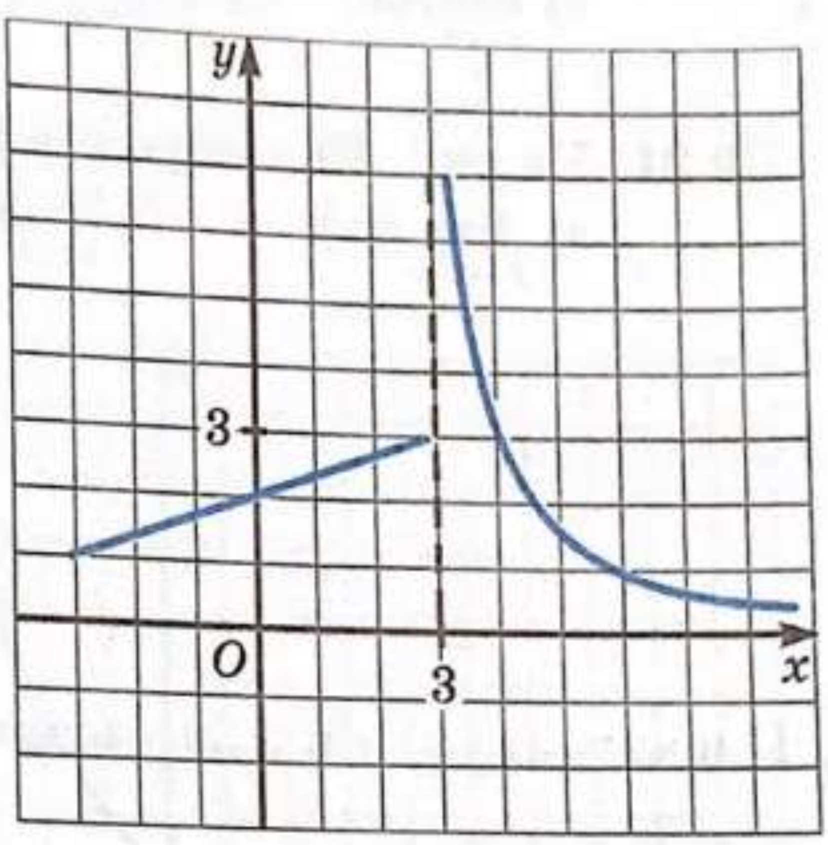


Рис. 77

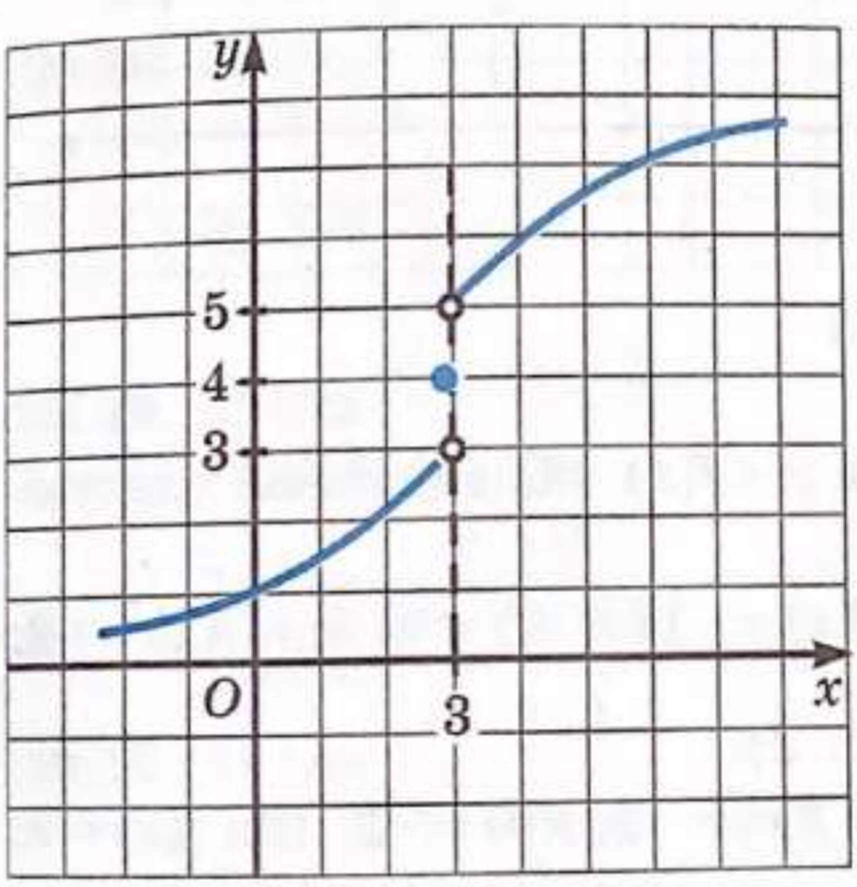


Рис. 78

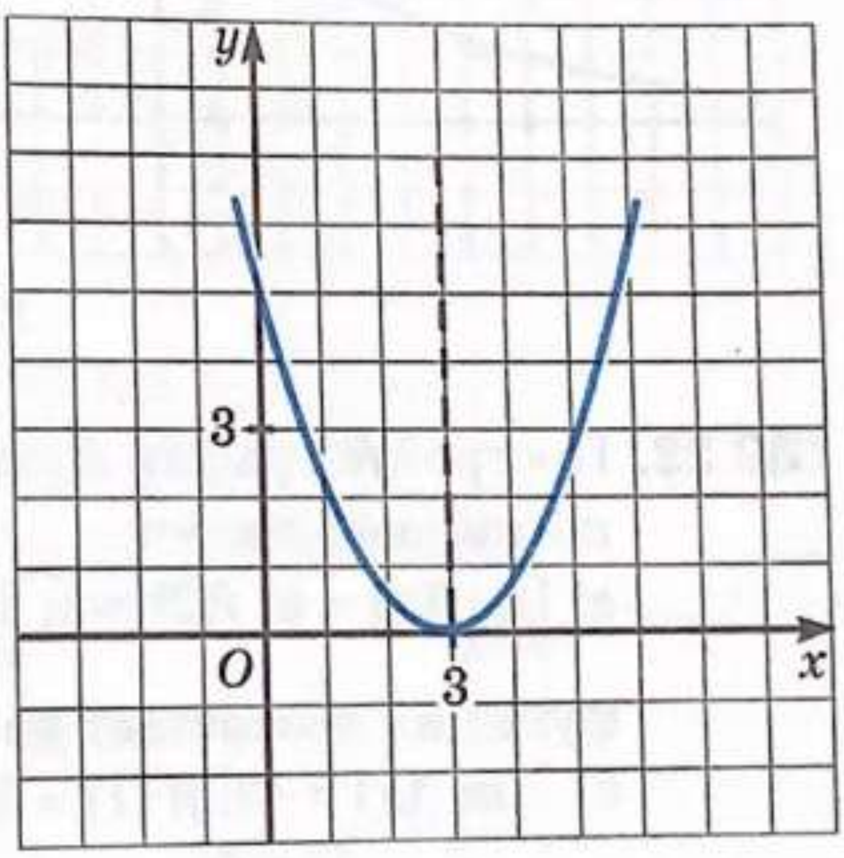


Рис. 79

39.19. Постройте график какой-нибудь функции $y = g(x)$, обладающей заданным свойством:

а) $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 2$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -3$;

в) $\lim\limits_{x \to -7} g(x) = -4$;

г) $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = 3{,}5$.

39.20. Постройте график какой-нибудь функции $y = f(x)$, обладающей заданными свойствами:

а) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ и $f(2) = 3$;

б) $\lim\limits_{x \to -6} f(x) = 4$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;

в) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 4$, $f(-1)$ не существует;

г) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1$ и $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -5$.

39.21. На рис. 80 изображён график функции $y = f(x)$. Найдите:

а) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; б) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; в) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

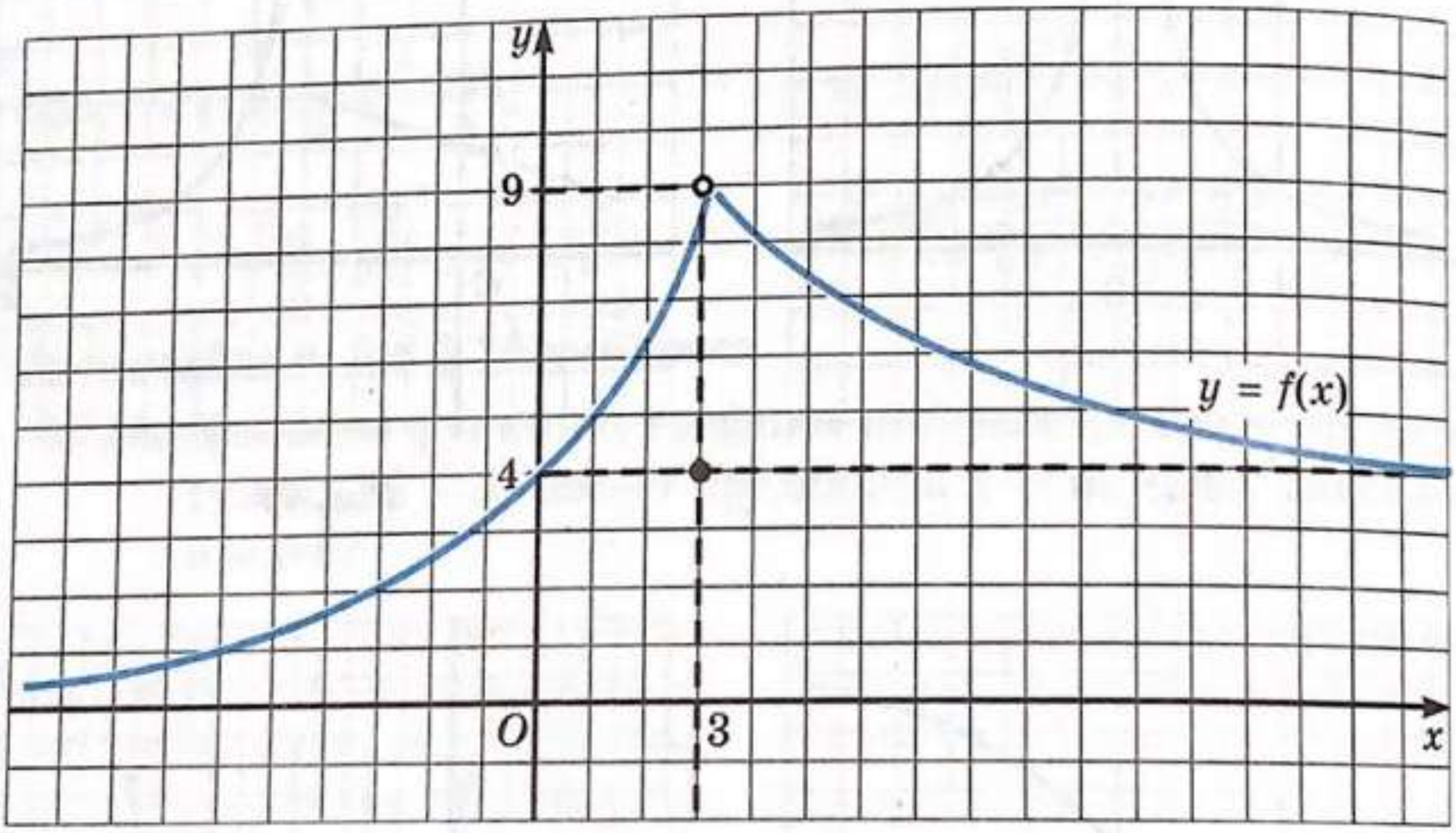


Рис. 80

○**39.22.** Постройте график функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

а) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$; $f(2) = 5$; $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -1$; $f(-3) = 1$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -2$;

функция возрастает на $(-\infty; 2]$;

б) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -3$; $f(-1) = 2$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$; $f(0) = -2$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$;

$E(f) = (-3; 5]$.

Вычислите:

39.23. а) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 3x + 5)$;

б) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x + 3}{4x + 2}$;

в) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 6x - 8)$;

г) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \dfrac{7x - 14}{21x + 2}$.

○**39.24.** а) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x + 4}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - 1}{x^2 + 3x - 4}$;

в) $\lim\limits_{x \to 3,5} \sqrt{2x - 6}$;

г) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5 - 2x}{3x^2 - 2x + 4}$.

○**39.25.** а) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sin \pi x}{x - 1}$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin \frac{\pi}{x}}{2x + 1}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos \pi x}{x + 2}$;

г) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cos \frac{2\pi}{x}}{3x - 1}$.

●**39.26.** а) $\lim\limits_{x \to 0,5} (2 \arcsin x + 3 \arccos x)$;

б) $\lim\limits_{x \to -0,5} \dfrac{\arccos x + \pi \sin \pi x}{\pi \cos \pi x + 2 \arcsin x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} (2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x)$;

г) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2 \operatorname{arcctg} x + \pi x}{\cos x - \cos(-x) + \operatorname{arctg} x}$.

○**39.27.** а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2 - x}$;

б) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{x^2 + x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3}$;

г) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x + 5}{x^2 + 5x}$.

○**39.28.** а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$;

б) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{2 + x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$;

г) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3 + x}{x^2 - 9}$.

○**39.29.** а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{2x^2 - x - 6}$;

в) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x - 3}$;

г) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2 - 11x + 18}{x - 9}$.

○**39.30.** а) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$;

б) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + x^3}{1 - x^2}$;

в) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^3 - 27}$;

г) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{16 - x^2}{64 - x^3}$.

●39.31. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 3x}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-7})$;

в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{2x+5} - 3}$;

г) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{5-3x} - \sqrt{-3x})$.

Вычислите:

○39.32. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$;

б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 5x + \sin 3x}$.

●39.33. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x - \sin 3x}{\sin 8x - \sin 2x}$.

345 **Прочитайте п. 3 в § 39 учебника.**

39.34. Найдите приращение функции $y = 2x - 3$ при переходе от точки $x_0 = 3$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = 3{,}2$;

б) $x_1 = 2{,}9$;

в) $x_1 = 3{,}5$;

г) $x_1 = 2{,}5$.

39.35. Найдите приращение функции $y = x^2 + 2x$ при переходе от точки $x_0 = -2$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = -1{,}9$;

б) $x_1 = -2{,}1$;

в) $x_1 = -1{,}5$;

г) $x_1 = -2{,}5$.

39.36. Найдите приращение функции $y = \sin x$ при переходе от точки $x_0 = 0$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$;

б) $x_1 = -\dfrac{\pi}{6}$;

в) $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$;

г) $x_1 = -\dfrac{\pi}{3}$.

○**39.37.** Найдите приращение функции $y = 2\sin x \cdot \cos x$ при переходе от точки $x_0 = 0$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = -\dfrac{\pi}{8}$;

б) $x_1 = \dfrac{\pi}{12}$;

в) $x_1 = \dfrac{\pi}{8}$;

г) $x_1 = -\dfrac{\pi}{12}$.

○39.38. Найдите приращение функции $y = \sqrt{x}$ при переходе от точки $x_0 = 1$ к точке $x_1 = x_0 + \Delta x$, если:

а) $\Delta x = 0{,}44$;
б) $\Delta x = -0{,}19$;
в) $\Delta x = 0{,}21$;
г) $\Delta x = 0{,}1025$.

39.39. По графику функции, представленному на рисунке, найдите приращение аргумента и приращение функции при переходе от точки x_0 к точке x_1:

а) рис. 81;
б) рис. 82.

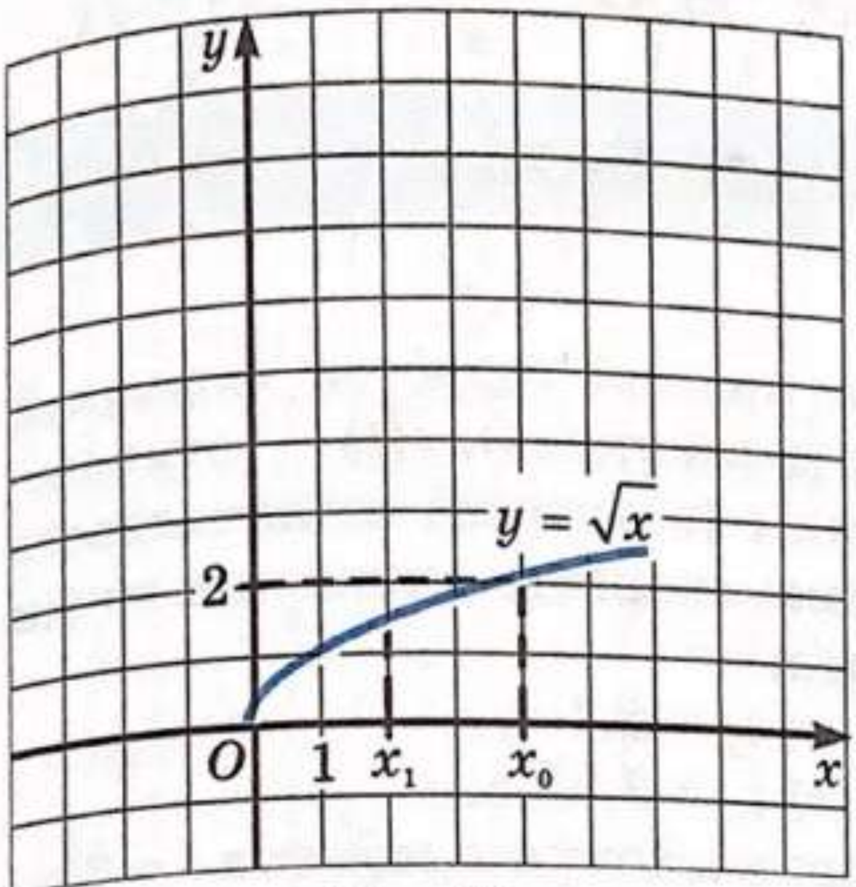


Рис. 81

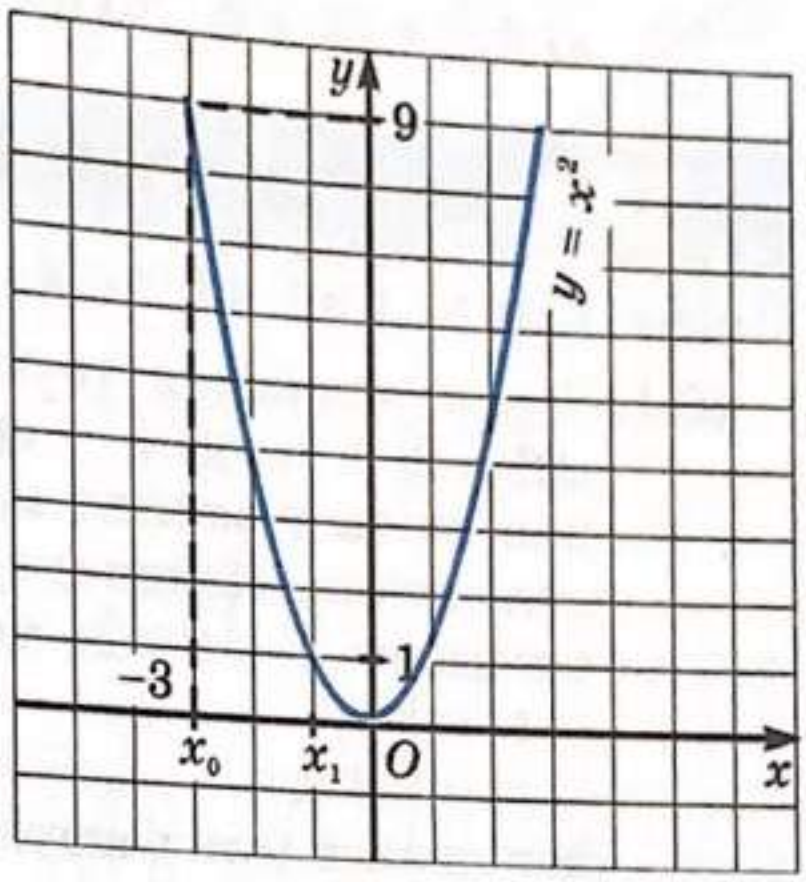


Рис. 82

○39.40. Найдите приращение функции $y = 4x^2 - x$ при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$:

а) $x = 0$, $\Delta x = 0{,}5$;
б) $x = 1$, $\Delta x = -0{,}1$;
в) $x = 0$, $\Delta x = -0{,}5$;
г) $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

○39.41. Найдите приращение функции $y = f(x)$ при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, если:

а) $f(x) = 3x + 5$;
б) $f(x) = -x^2$;
в) $f(x) = 4 - 2x$;
г) $f(x) = 2x^2$.

○39.42. Вычислите, чему равно отношение приращения функции $y = x^2 - 4x + 1$ к приращению аргумента при переходе от точки $x_0 = 2$ к точке:

а) $x = 2{,}1$;
б) $x = 1{,}9$;
в) $x = 2{,}5$;
г) $x = 1{,}5$.

39.43. Для функции $y = f(x)$ найдите Δf при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, если:

а) $f(x) = kx + m$;
б) $f(x) = ax^2$;
в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
г) $f(x) = \sqrt{x}$.

○**39.44.** Для функции $y = f(x)$ найдите $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, если:

а) $f(x) = kx + b$; б) $f(x) = ax^2$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$; г) $f(x) = \sqrt{x}$.

○**39.45.** Для функции $y = f(x)$ найдите $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, если:

а) $f(x) = kx + b$; б) $f(x) = ax^2$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$; г) $f(x) = \sqrt{x}$.

§ 40 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

348 **Прочитайте п. 1 в § 40 учебника.**

40.1. Закон движения точки по прямой задаётся формулой $s(t) = 2t + 1$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента $t_1 = 2$ с до момента:

а) $t_2 = 3$ с; в) $t_2 = 2{,}1$ с;

б) $t_2 = 2{,}5$ с; г) $t_2 = 2{,}05$ с.

Вычислите мгновенную скорость точки в момент $t = 2$ с.

40.2. Закон движения точки по прямой задаётся формулой $s(t) = t^2$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента $t_1 = 0$ с до момента:

а) $t_2 = 0{,}1$ с; в) $t_2 = 0{,}2$ с;

б) $t_2 = 0{,}01$ с; г) $t_2 = 0{,}001$ с.

Вычислите мгновенную скорость точки в момент $t = 1$ с.

40.3. Закон движения точки по прямой задаётся формулой $s(t) = 2t^2 + t$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента $t_1 = 0$ с до момента:

а) $t_2 = 0{,}6$ с; в) $t_2 = 0{,}5$ с;

б) $t_2 = 0{,}2$ с; г) $t_2 = 0{,}1$ с.

Вычислите мгновенную скорость точки в момент $t = 1$ с.

○**40.4.** Закон движения точки по прямой задаётся формулой $s = s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите мгновенную скорость движения точки, если:

а) $s(t) = 4t + 1$; в) $s(t) = 3t + 2$;

б) $s(t) = t^2 - t$; г) $s(t) = t^2 - 2t$.

Прочитайте п. 2 в § 40 учебника.

352

40.5. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком. Определите значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$, если график функции изображён:

а) на рис. 83;

б) на рис. 84;

в) на рис. 85;

г) на рис. 86.

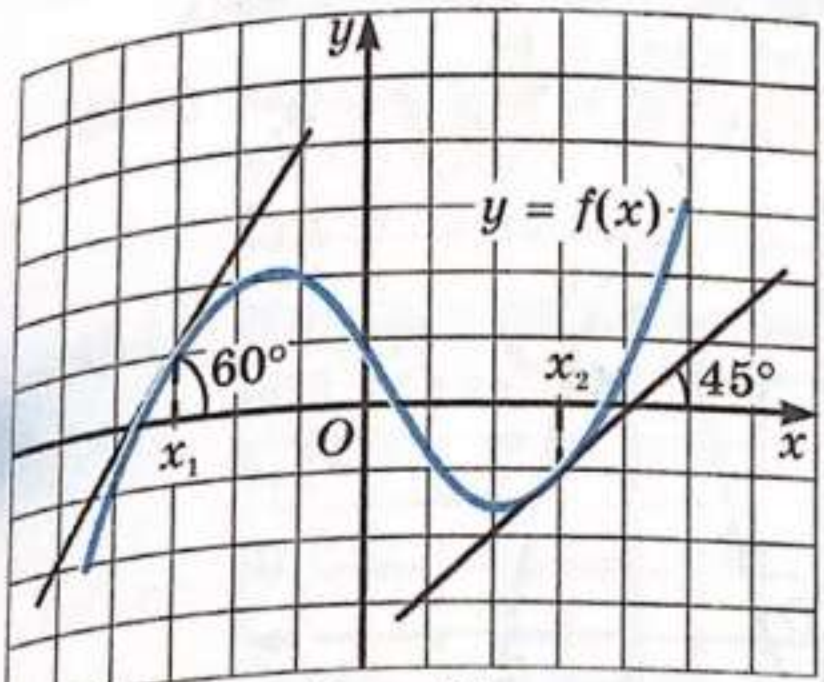


Рис. 83

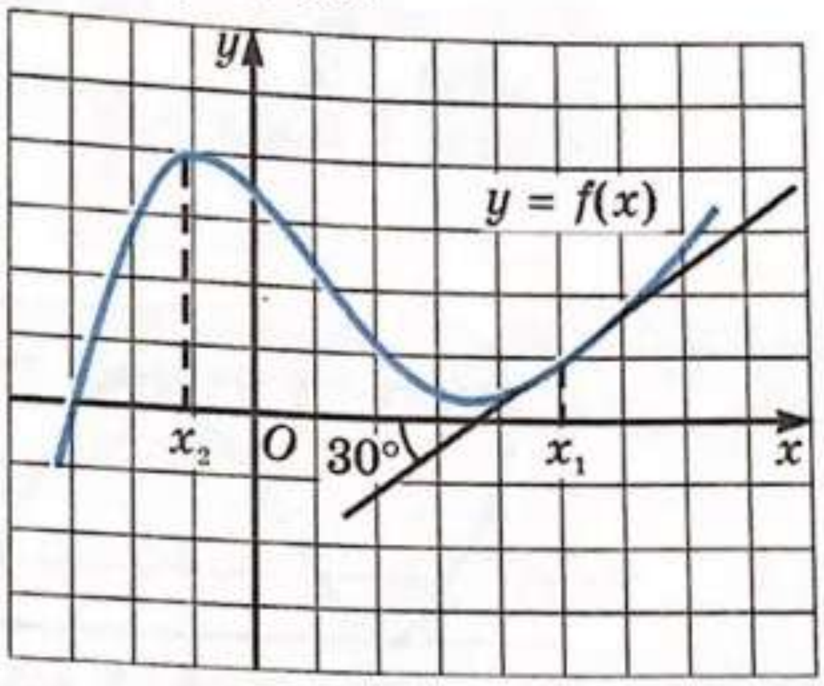


Рис. 84

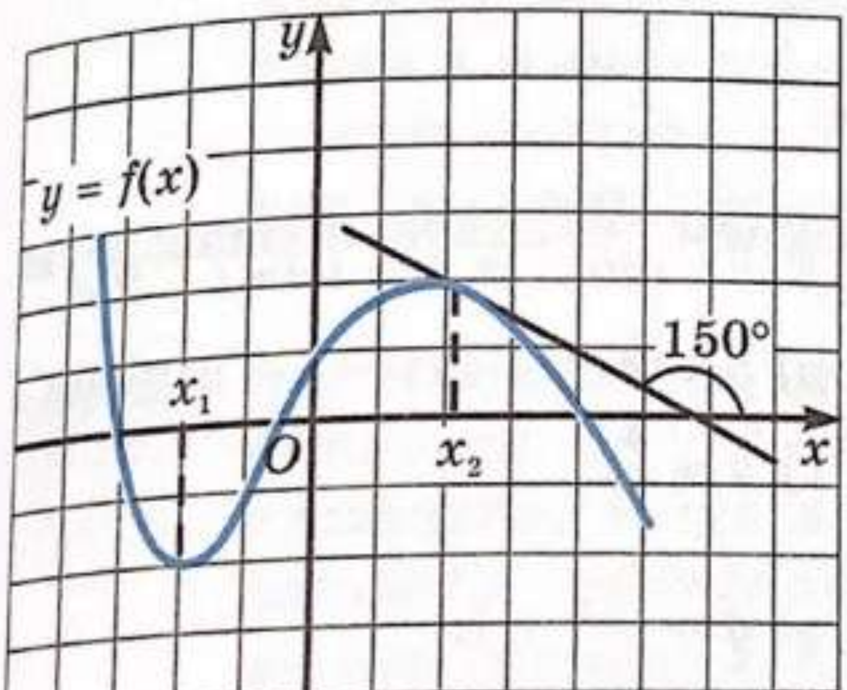


Рис. 85

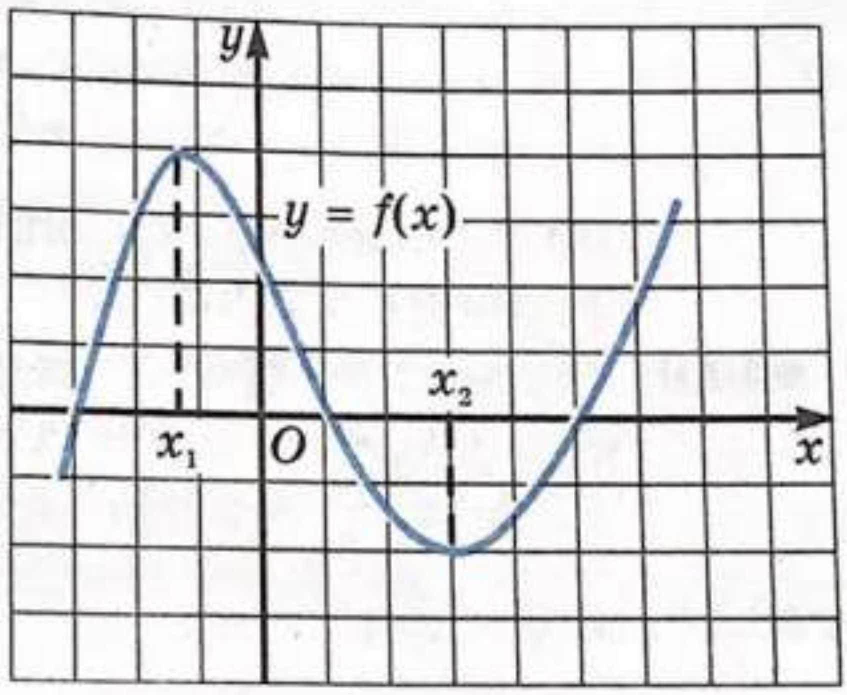


Рис. 86

40.6. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 87). Сравните значения производной в указанных точках:

а) $f'(-7)$ и $f'(-2)$;

б) $f'(-4)$ и $f'(2)$;

в) $f'(-9)$ и $f'(0)$;

г) $f'(-1)$ и $f'(5)$.

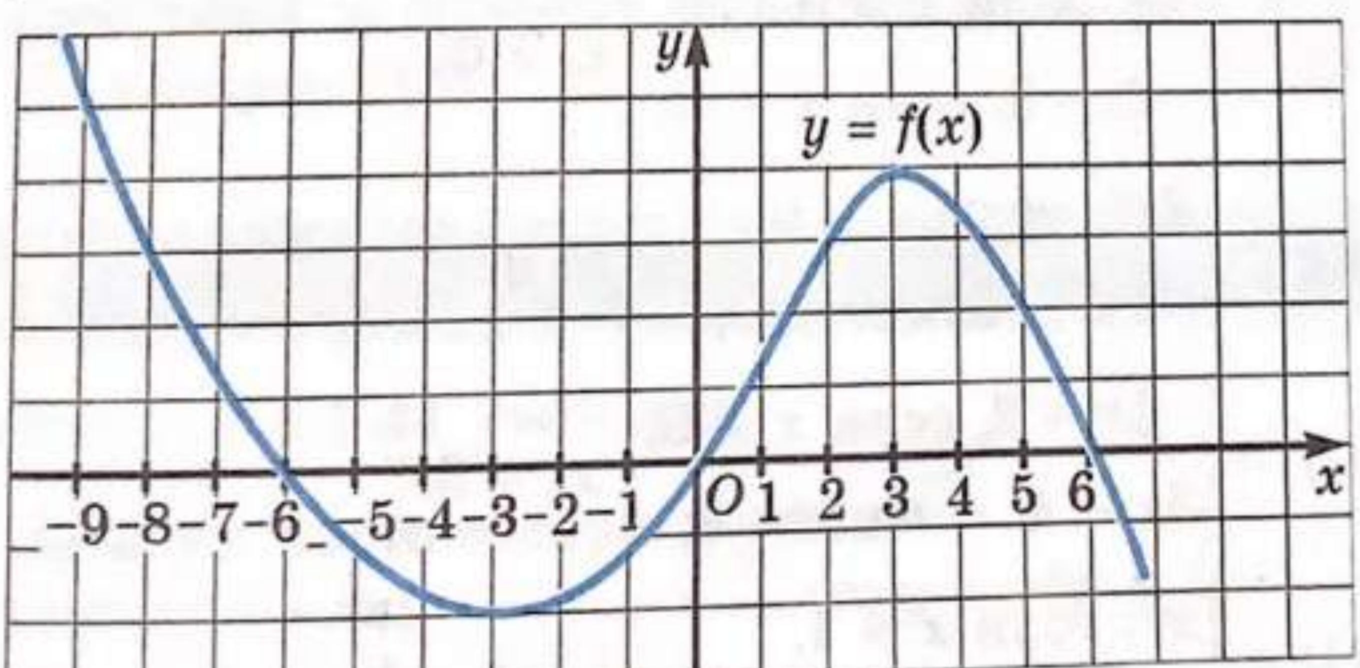


Рис. 87

40.7. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 87). Укажите два значения аргумента x_1 и x_2, при которых:

а) $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) > 0$;
б) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) > 0$;
в) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) < 0$;
г) $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$.

40.8. Функция $y = \varphi(x)$ задана своим графиком (рис. 88). Укажите несколько значений аргумента, для которых:

а) $\varphi'(x) > 0$;
б) $\varphi'(x) < 0$ и $x > 0$;
в) $\varphi'(x) < 0$;
г) $\varphi'(x) > 0$ и $x < 0$.

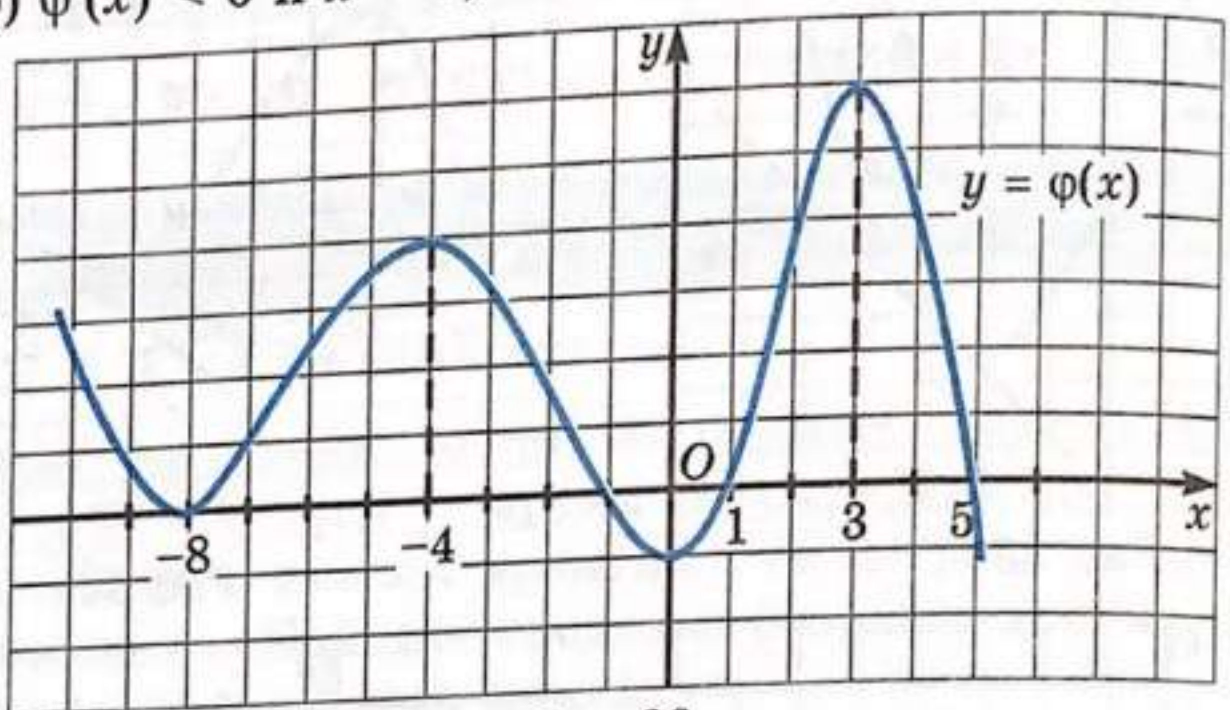


Рис. 88

Воспользовавшись определением, найдите производную функции в точке x:

●40.9. а) $y = x^2 + 2x$;
б) $y = \dfrac{1}{x}$;
в) $y = 3x^2 - 4x$;
г) $y = \dfrac{4}{x}$.

●40.10. а) $y = \sqrt{x}$;
б) $y = \dfrac{1}{x^2}$;
в) $y = \sqrt{x} + 1$;
г) $y = x^3$.

●40.11. Воспользовавшись определением, найдите производную функции в точке x_0 или докажите, что она не существует:

а) $y = \begin{cases} 3x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -2x + 3, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ $x_0 = 0$.

б) $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -2x^2, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ $x_0 = 0$.

в) $y = \begin{cases} -4x + 2, \text{ если } x \geqslant 3, \\ 2x - 4, \text{ если } x < 3; \end{cases}$ $x_0 = 3$.

г) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 1, \\ 2x - 1, \text{ если } x > 1; \end{cases}$ $x_0 = 1$.

●40.12. Воспользовавшись определением, найдите производную функции в точке x_0 или докажите, что она не существует:
а) $y = |x + 4|$, $x_0 = -4$;
б) $y = -3x|x|$, $x_0 = 0$;
в) $y = 2x|x|$, $x_0 = 0$;
г) $y = (x - 1)|x - 1|$, $x_0 = 1$.

40.13. Найдите скорость изменения функции в точке x:
а) $y = 9{,}5x - 3$;
б) $y = -16x + 3$;
в) $y = 6{,}7x - 13$;
г) $y = -9x + 4$.

○40.14. Найдите скорость изменения функции $y = f(x)$ в указанной точке:
а) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$;
б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$;
в) $f(x) = x^2$, $x_0 = -2$;
г) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -0{,}5$.

○40.15. Закон движения точки по прямой задаётся формулой $s(t) = t^2$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите скорость и ускорение (скорость изменения скорости) в момент времени t, если:
а) $t = 1$ с; б) $t = 2{,}1$ с; в) $t = 2$ с; г) $t = 3{,}5$ с.

○40.16. Закон движения некоторой точки по прямой задаётся формулой $s(t) = t^2 + t$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите скорость и ускорение в момент времени t, если:
а) $t = 1$ с; б) $t = 2{,}1$ с; в) $t = 2$ с; г) $t = 3{,}5$ с.

○40.17. а) Прямая, проходящая через начало координат, является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $A(2; -4{,}5)$. Вычислите $f'(2)$.
б) Прямая, проходящая через точку $A(1; 1)$, является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $B(3; 4)$. Вычислите $f'(3)$.

§ 41 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

358

Прочитайте п. 1 в § 41 учебника.

41.1. Найдите производную функции:
а) $y = 7x + 4$;
б) $y = x^2$;
в) $y = -6x + 1$;
г) $y = \frac{1}{x}$.

Найдите производную функции:

41.2. а) $y = x^5$;
б) $y = x^{10}$;
в) $y = x^4$;
г) $y = x^{201}$.

41.3. а) $y = \sin x$;
б) $y = \sqrt{x}$;
в) $y = \cos x$;
г) $y = x^{10}$.

362 **Прочитайте п. 2 в § 41 учебника.**

Найдите производную функции:

41.4. а) $y = \operatorname{tg} x$;
б) $y = \operatorname{ctg} x$;
в) $y = \operatorname{tg} x + 4$;
г) $y = \operatorname{ctg} x + 8$.

41.5. а) $y = x^2 - 7x$;
б) $y = -3x^2 - 13x$;
в) $y = 7x^2 + 3x$;
г) $y = -x^2 + 8x$.

41.6. а) $y = x^3 + 2x^5$;
б) $y = x^4 - x^9$;
в) $y = x^3 + 4x^{100}$;
г) $y = x^4 - 7x^9$.

41.7. а) $y = 12x + \sqrt{x}$;
б) $y = -2x^2 - \dfrac{1}{x}$;
в) $y = \sqrt{x} - 5x^2$;
г) $y = 10x^2 + \dfrac{1}{x}$.

41.8. а) $y = 6\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$;
б) $y = -2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$;
в) $y = 10\sqrt{x} + \dfrac{5}{x}$;
г) $y = -8\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$.

41.9. а) $y = \cos x + 2x$;
б) $y = 3\sin x + \cos x$;
в) $y = \sin x - 3x$;
г) $y = 2\cos x + \sin x$.

41.10. а) $y = \dfrac{1}{3}\sin x - 3\operatorname{ctg} x$;
б) $y = 2\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\cos x$;
в) $y = \dfrac{\cos x}{5} + 1{,}4\operatorname{ctg} x$;
г) $y = 6\operatorname{tg} x - \sin x$.

41.11. а) $y = x^5 + 9x^{20} + 1$;
б) $y = x^7 - 4x^{16} - 3$;
в) $y = x^6 + 13x^{10} + 12$;
г) $y = x^9 - 6x^{21} - 36$.

41.12. а) $y = (x^2 - 1)(x^4 + 2)$;
б) $y = (x^2 + 3)(x^6 - 1)$;
в) $y = (x^2 + 3)(x^4 - 1)$;
г) $y = (x^2 - 2)(x^7 + 4)$.

41.13. а) $y = \sqrt{x}(2x - 4)$;
б) $y = (x^3 + 1) \cdot \sqrt{x}$;
в) $y = \sqrt{x}(8x - 10)$;
г) $y = \sqrt{x} \cdot (x^4 + 2)$.

41.14. а) $y = x \cdot \sin x$;
б) $y = \sqrt{x} \cdot \cos x$;
в) $y = x \cdot \cos x$;
г) $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$.

○41.15. а) $y = \left(\frac{1}{x} + 1\right)(2x - 3)$;

б) $y = \left(7 - \frac{1}{x}\right)(6x + 1)$;

в) $y = \left(\frac{1}{x} + 8\right)(5x - 2)$;

г) $y = \left(9 - \frac{1}{x}\right)(3x + 2)$.

○41.16. а) $y = x^3 \cdot \operatorname{tg} x$;

б) $y = \cos x \cdot \operatorname{ctg} x$;

в) $y = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{ctg} x$;

г) $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$.

○41.17. а) $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$;

б) $y = (x^2 + 2x + 4)(x - 2)$;

в) $y = (x + 1)(x^2 - x + 1)$;

г) $y = (x^2 - 3x + 9)(x + 3)$.

○41.18. а) $y = \frac{x^3}{2x + 4}$;

б) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$;

в) $y = \frac{x^2}{3 - 4x}$;

г) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

○41.19. а) $y = \frac{3\sqrt{x}}{2x + 9}$;

б) $y = \frac{\sin x}{x}$;

в) $y = \frac{-2\sqrt{x}}{8 - 3x}$;

г) $y = \frac{\cos x}{x}$.

○41.20. а) $y = \frac{x^9 - 3}{x^3}$;

б) $y = \frac{x^{15}}{x^{10} + 1}$;

в) $y = \frac{x^5 + x}{x^5 - 1}$;

г) $y = \frac{x^{13}}{x^4 - 2}$.

○41.21. а) $y = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$;

б) $y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$;

в) $y = \cos^2 3x + \sin^2 3x$;

г) $y = -\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

○41.22. а) $y = \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$;

б) $y = \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} + \cos \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{3}$;

в) $y = \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$;

г) $y = \cos \frac{x}{5} \cos \frac{4x}{5} - \sin \frac{x}{5} \sin \frac{4x}{5}$.

41.23. Найдите значение производной заданной функции в точке x_0:

а) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

б) $y = x^2$, $x_0 = -7$;

в) $y = -3x - 11$, $x_0 = -3$;

г) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0{,}5$.

Найдите значение производной заданной функции в точке x_0:

41.24. а) $y = \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$;

б) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

в) $y = \cos x$, $x_0 = -3\pi$;

г) $y = \sin x$, $x_0 = 0$.

41.25. а) $y = 6x - 9$, $x_0 = 3$;

б) $y = x^3 - 3x + 2$, $x_0 = -1$;

в) $y = 5x - 8$, $x_0 = 2$;

г) $y = x^2 + 3x - 4$, $x_0 = 1$.

41.26. а) $y = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}$, $x_0 = 4$;

б) $y = \sqrt{x} + 4$, $x_0 = 9$;

в) $y = \frac{8}{x} - \frac{x^3}{3}$, $x_0 = 1$;

г) $y = \sqrt{x} + 5x$, $x_0 = 4$.

41.27. а) $y = 2\sin x - 13\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

б) $y = -\cos x + \frac{1}{\pi}x^2$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

в) $y = -\sin x - 3$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

г) $y = 4\cos x + x\sqrt{2}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

41.28. а) $y = \operatorname{tg} x + \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

б) $y = 2\operatorname{ctg} x - 3\operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

в) $y = \operatorname{ctg} x + \frac{\pi^2}{x}$, $x_0 = -\frac{\pi}{6}$;

г) $y = (2x + 3)^2 - 4\operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$.

○**41.29.** а) $y = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

б) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$, $x_0 = 2$;

в) $y = \frac{\cos x}{x}$, $x_0 = \pi$;

г) $y = \frac{2x}{x + 1}$, $x_0 = 0$.

○**41.30.** Докажите, что производная заданной функции принимает положительные значения при всех допустимых значениях аргумента:

а) $y = 3x + 12$;

б) $y = 2x^3 + 15x$;

в) $y = -2\sin x + 4x$;

г) $y = 3x - 1{,}5\cos x$.

○41.31. Докажите, что производная заданной функции принимает отрицательные значения при всех допустимых значениях аргумента:

а) $y = \frac{1}{x^5} - 1{,}5x$;

б) $y = -\sqrt{x} + 14$;

в) $y = 1{,}4\cos x - 3x$;

г) $y = \frac{12}{x^7} + 29$.

○41.32. а) Найдите те значения аргумента, при которых производная функции $y = x^3 - 3x$ принимает положительные значения;

б) найдите те значения аргумента, при которых производная функции $y = x^5 - \frac{5}{4}x^4$ принимает отрицательные значения;

в) найдите те значения аргумента, при которых производная функции $y = \sqrt{x} + x$ принимает неотрицательные значения;

г) найдите те значения аргумента, при которых производная функции $y = 7\cos x + 12$ принимает неположительные значения.

Найдите скорость изменения функции в точке x_0:

41.33. а) $y = x^2$, $x_0 = -0{,}1$;

б) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;

в) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$;

г) $y = \cos x$, $x_0 = \pi$.

○41.34. а) $y = x^3 + 2x$, $x_0 = 2$;

б) $y = \left(\sqrt{x} + 1\right)\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

в) $y = \frac{1}{x}\left(\frac{4}{x} - 2\right)$, $x_0 = -0{,}5$;

г) $y = 2\sin x - 4x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

●41.35. Существует ли производная заданной функции в точке x_0? Если да, то вычислите её:

а) $y = |x - 2|(x - 2)$, $x_0 = 2$;

б) $y = (x + 2)|x + 2|$, $x_0 = -2$.

●41.36. Существует ли производная заданной функции в указанных точках? Если да, то найдите значения производных:

а) $y = x^2 - 5|x| + 6$, $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$;

б) $y = |x^2 - 5|x| + 6|$, $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2{,}5$.

41.37. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = x^2$, $x_0 = -4$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -\frac{1}{3}$;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

г) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$.

41.38. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$;

б) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$;

в) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$;

г) $f(x) = \sin x,\ x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

Определите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ равен k, если:

○41.39. а) $f(x) = \sqrt{x} - x,\ k = 1$;

б) $f(x) = \sqrt{x} + 3x,\ k = 4$.

○41.40. а) $f(x) = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},\ k = -\frac{\sqrt{2}}{4}$;

б) $f(x) = \cos^2\frac{x}{2},\ k = \frac{1}{2}$.

Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси x:

41.41. а) $f(x) = x^6 - 4x,\ x_0 = 1$;

б) $f(x) = \sqrt{x} - 3,\ x_0 = \frac{1}{4}$;

в) $f(x) = -x^5 - 2x^2 + 2,\ x_0 = -1$;

г) $f(x) = \frac{25}{x} + 2,\ x_0 = \frac{5}{4}$.

○41.42. а) $f(x) = 10 - \cos x,\ x_0 = \frac{3\pi}{2}$;

б) $f(x) = 2\operatorname{tg} x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;

в) $f(x) = 4 - \sin x,\ x_0 = 6\pi$;

г) $f(x) = -4\operatorname{ctg} x,\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

○41.43. а) $f(x) = x^2\sin x,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

б) $f(x) = x(1 + \cos x),\ f'(\pi) = ?$

в) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \frac{x^2}{\pi} + x\sin\frac{\pi}{6},\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$

г) $f(x) = \sqrt{3}\cos x - x\cos\frac{\pi}{6} + \frac{x^2}{\pi},\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

○41.44. Определите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = h(x)$ образует с положительным направлением оси абсцисс заданный угол α:

а) $h(x) = x^2 - 3x + 19$, $\alpha = 45°$;

б) $h(x) = \dfrac{4}{x + 2}$, $\alpha = 135°$.

○41.45. Определите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = h(x)$ образует острый угол с положительным направлением оси x, если:

а) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

б) $h(x) = 4\sqrt{x} - x$;

в) $h(x) = x^3 - x^4 - 19$;

г) $h(x) = \operatorname{tg} x - 4x$.

○41.46. Определите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = \varphi(x)$ образует тупой угол с положительным направлением оси x, если:

а) $\varphi(x) = \sin x + 3$;

б) $\varphi(x) = 0{,}2x^5 - 3\frac{1}{3}x^3 + 9x$;

в) $\varphi(x) = \operatorname{ctg} x + 9x$;

г) $\varphi(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 21$.

○41.47. При каких значениях a касательные к графикам функций $y = f(x)$, $y = h(x)$ в точке $x = a$ не имеют общих точек:

а) $f(x) = x^7$, $h(x) = x^8$;

б) $f(x) = x^2 + x + 3$, $h(x) = x^3$?

○41.48. а) При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = 2$, если известно, что $f(x) = 2\sqrt{x} - 5x + 3$?

б) При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = 1$, если известно, что $f(x) = 3x - \sqrt{x} + 13$?

Решите неравенство $f'(x) < 0$:

○41.49. а) $f(x) = x^3 - x^4$;

б) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 6x$.

○41.50. а) $f(x) = \sin 2x$;

б) $f(x) = -4\cos x + 2x$.

Решите неравенство $f'(x) > 0$:

○41.51. а) $f(x) = x^3 + x^4$;

б) $f(x) = \dfrac{4}{2 - 5x}$.

○41.52. а) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$;

б) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$.

При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = f(x)$ равна скорости изменения функции $y = g(x)$:

○**41.53.** а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $g(x) = 7{,}5x^2 - 16x$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{-1}{x}$?

○**41.54.** а) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = -\operatorname{ctg} x$?

○**41.55.** При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = g(x)$ больше скорости изменения функции $y = h(x)$:

а) $g(x) = x^3 - 3x^2$, $h(x) = 1{,}5x^2 - 9$;

б) $g(x) = \operatorname{tg} x$, $h(x) = 4x - 81$?

○**41.56.** Найдите значения аргумента, удовлетворяющие условию $f'(x) = g'(x)$, если:

а) $f(x) = \frac{6}{5x - 9}$, $g(x) = \frac{3}{7 - 5x}$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $g(x) = 2x + 15$.

○**41.57.** Найдите значения аргумента, удовлетворяющие условию $f'(x) \leqslant g'(x)$, если:

а) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 61$;

б) $f(x) = x\cos x$, $g(x) = \sin x$.

41.58. Укажите, какой формулой можно задать функцию $y = f(x)$, если:

а) $f'(x) = 2x$;

б) $f'(x) = \cos x$;

в) $f'(x) = 3$;

г) $f'(x) = -\sin x$.

○**41.59.** Известна производная функции $y = f'(x)$. Укажите, какой формулой можно задать функцию $y = f(x)$, если:

а) $f'(x) = 3x^2 + 2x$;

б) $f'(x) = -\frac{7}{x^2}$;

в) $f'(x) = 5x^4 - 1$;

г) $f'(x) = \frac{9}{2\sqrt{x}}$.

●**41.60.** Задайте аналитически функцию $y = f(x)$, если графиком её производной является:

а) парабола (см. рис. 98);

б) ломаная (см. рис. 102).

○41.61. а) При каких значениях x верно равенство $y' \cdot y + y^2 = 0$, если $y = 2\sin x$?

б) При каких значениях x верно равенство $y^2 + (y')^2 = 1$, если $y = \sqrt{x}$?

●41.62. При каких значениях a и b функция

$$y = \begin{cases} 2x - 3, \text{ если } x \leqslant 1, \\ x^2 + ax + b, \text{ если } x > 1: \end{cases}$$

а) непрерывна на всей числовой прямой;

б) дифференцируема на всей числовой прямой?

●41.63. При каких значениях a и b функция

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3}{4}, \text{ если } x \leqslant -1, \\ ax^3 + bx, \text{ если } x > -1: \end{cases}$$

а) непрерывна на всей числовой прямой;

б) дифференцируема на всей числовой прямой?

Прочитайте п. 3 в § 41 учебника. 368

○41.64. Найдите вторую производную функции:

а) $y = x^4 + 2x$;

б) $y = x^5 - 3x$;

в) $y = \sin x + 1$;

г) $y = 2\cos x - 4$.

○41.65. Найдите $f'''(0)$, если:

а) $f(x) = 2x^3 - x^2$;

б) $f(x) = x + \cos x$;

в) $f(x) = 4\sin x - \cos x$;

г) $f(x) = \sin x + \cos x$.

○41.66. Тело движется по прямой согласно закону $x(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 2t + 1$ (где t — время (в секундах), $x(t)$ — координата (в метрах)). Найдите:

а) ускорение движения в момент времени $t = 3$ с;

б) силу, действующую на тело массой 1 г в момент времени $t = 3$ с.

○41.67. а) При каких значениях x верно равенство $y'' + y' - y = 0$, если $y = 3\cos x$?

б) При каких значениях x верно равенство $(y'')^2 + 2y' = y^2 + 1$, если $y = \sin x$?

○41.68. а) Докажите, что функция $y = x\sin x$ удовлетворяет соотношению $y'' + y = 2\cos x$;

б) докажите, что при любых значениях a и b функция $y = a\sin x + b\cos x$ удовлетворяет соотношению $y'' + y = 0$.

○**41.69.** Строится мост параболической формы, соединяющий пункты A и B, расстояние между которыми равно 200 м. Въезд на мост и съезд с моста должны быть прямолинейными участками пути, эти участки направлены к горизонту под углом 15°. Указанные прямые должны быть касательными к параболе. Составьте уравнение профиля моста в заданной системе координат (рис. 89).

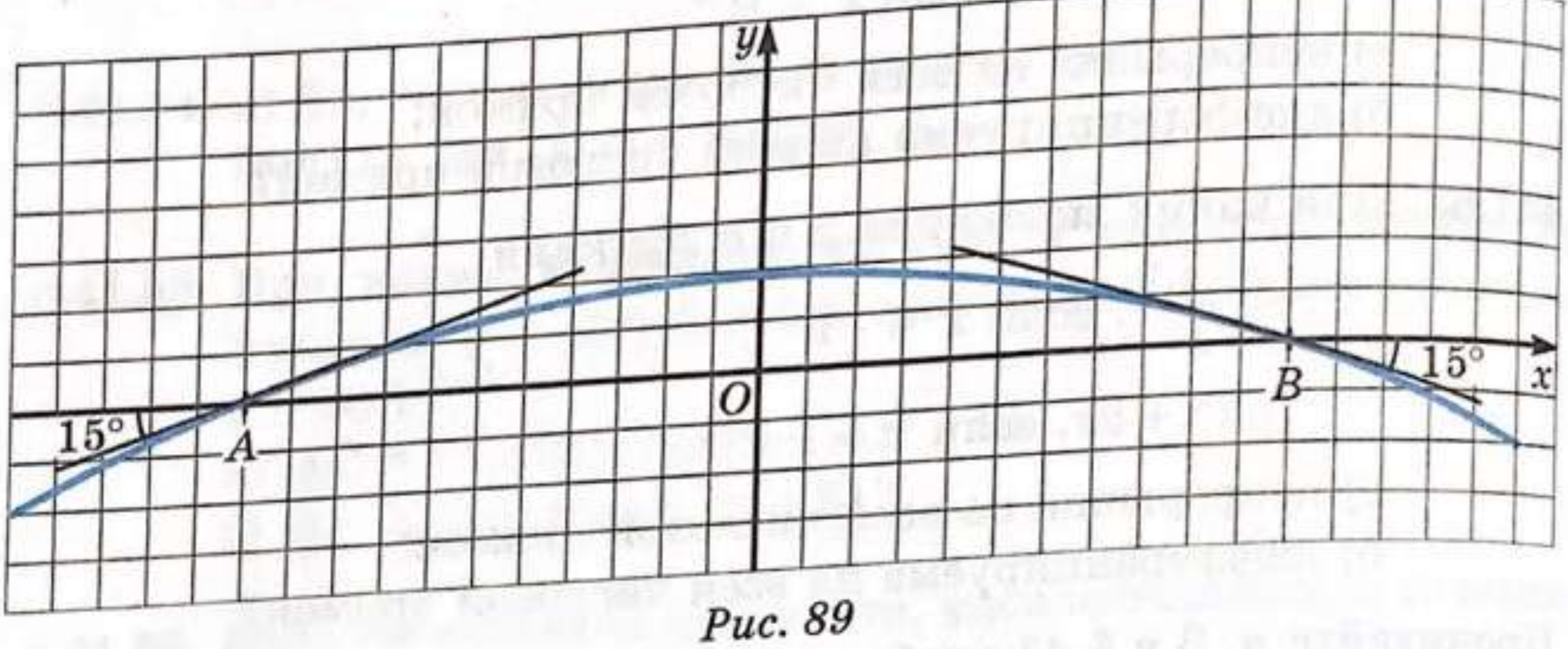


Рис. 89

●**41.70.** а) При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = 4x^2 - |a|x$, проведённые в точках его пересечения с осью x, образуют между собой угол 60°?
б) При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = x^2 + |a|x$, проведённые в точках его пересечения с осью x, образуют между собой угол 45°?

§ 42 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Найдите производную функции:

42.1. а) $y = (4x - 9)^7$;
в) $y = \left(\frac{x}{3} + 2\right)^{12}$;
б) $y = \left(12 - \frac{x}{5}\right)^6$;
г) $y = (15 - 9x)^{13}$.

42.2. а) $y = \sin(3x - 9)$;
в) $y = \sin(5 - 3x)$;
б) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$;
г) $y = \cos(9x - 10)$.

42.3. а) $y = \operatorname{tg}\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$;
в) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right)$;
б) $y = \sqrt{50 + 0{,}2x}$;
г) $y = \sqrt{4 - 9x}$.

○42.4. а) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;
б) $y = 2\sin x \cdot \cos x$;
в) $y = 1 - 2\sin^2 3x$;
г) $y = \sin^2 3x + \cos^2 3x$.

○42.5. а) $y = \sin 3x \cos 5x + \cos 3x \sin 5x$;
б) $y = \cos 4x \cos 6x - \sin 4x \sin 6x$;
в) $y = \sin 7x \cos 3x - \cos 7x \sin 3x$;
г) $y = \cos \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{x}{6} + \sin \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{6}$.

○42.6. а) $y = (1 - x^3)^5$;
б) $y = \sqrt{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$;
в) $y = \dfrac{1}{(x^2 - 7x + 8)^2}$;
г) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5}}$.

○42.7. а) $y = \sin^3 x$;
б) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$;
в) $y = \operatorname{tg}^5 x$;
г) $y = \operatorname{tg}(x + x^3)$.

●42.8. а) $y = \sqrt{1 - x^2} + \cos^3 x$;
б) $y = \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{x^2 + 1}$;
в) $y = \sin^2 x \cdot \cos\sqrt{x}$;
г) $y = \dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{x^3}$.

Найдите значение производной функции в точке x_0:

○42.9. а) $y = (3x - 2)^7$, $x_0 = 3$;
б) $y = \sqrt{25 - 9x}$, $x_0 = 1$;
в) $y = (4 - 5x)^7$, $x_0 = 1$;
г) $y = \sqrt{7x + 4}$, $x_0 = 3$.

○42.10. а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;
б) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;
в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$;
г) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

○42.11. а) $y = (x^2 - 3x + 1)^7$, $x_0 = 1$;
б) $y = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x + 4}}$, $x_0 = 0$;
в) $y = \sqrt{(x - 1)(x - 4)}$, $x_0 = 0$;
г) $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 3}\right)^3$, $x_0 = 1$.

○ **42.12.** а) $y = \operatorname{tg}^3 x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; в) $y = \cos x^3,\ x_0 = 0$;

б) $y = \sin\sqrt{x},\ x_0 = \dfrac{\pi^2}{36}$; г) $y = \operatorname{ctg}^2 x - 1,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Вычислите скорость изменения функции в точке x_0:

○ **42.13.** а) $y = (2x + 1)^5,\ x_0 = -1$; в) $y = \dfrac{4}{12x - 5},\ x_0 = 2$;

б) $y = \sqrt{7x - 3},\ x_0 = 1$; г) $y = \sqrt{11 - 5x},\ x_0 = -1$.

○ **42.14.** а) $y = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right),\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

б) $y = \operatorname{tg} 6x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{24}$;

в) $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right),\ x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

г) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{3},\ x_0 = \pi$.

○ **42.15.** а) $y = \sqrt{4x^2 - 20x + 25},\ x_0 = 3$;

б) $y = \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 1},\ x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

в) $y = \sqrt{1 - 10x + 25x^2},\ x_0 = 1$;

г) $y = \sqrt{1 - \cos x + \dfrac{1}{4}\cos^2 x},\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

● **42.16.** а) $y = (x - \sin x)^2,\ x_0 = \pi$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{\cos x}},\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

в) $y = \sqrt{(\sin x + 1)\cos x},\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

г) $y = (\operatorname{tg} x - 1)^4,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

○ **42.17.** При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = f(x)$ равна скорости изменения функции $y = g(x)$:

а) $f(x) = \cos 2x,\ g(x) = \sin x$;

б) $f(x) = \sin 6x,\ g(x) = \cos 12x + 4$;

в) $f(x) = \dfrac{2}{3}\sin 3x,\ g(x) = \cos 2x$;

г) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x},\ g(x) = 2\sqrt{x}$?

○42.18. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = g(x)$ больше скорости изменения функции $y = h(x)$:

а) $g(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, $h(x) = 6x - 12$;

б) $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$, $h(x) = 3 - \sqrt{2}x$?

○42.19. Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью x:

а) $h(x) = \frac{18}{4x + 1}$, $x_0 = 0{,}5$;

б) $h(x) = \cos^3 x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

в) $h(x) = \sqrt{6 - 2x}$, $x_0 = 1$;

г) $h(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

○42.20. Определите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ равен a, если:

а) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$, $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $f(x) = \cos^2 x$, $k = \frac{1}{2}$.

○42.21. Определите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной равен 0:

а) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x$;

б) $f(x) = \sin^2 x \cos 2x$.

○42.22. а) Найдите корни уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащие отрезку $[0,\ 2]$, если известно, что $f(x) = \cos^2 x + 1 + \sin x$.

б) Найдите корни уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$, если известно, что $f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1$.

○42.23. а) Дано: $f(x) = a \sin 2x + b \cos x$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$, $f'\left(\frac{9\pi}{2}\right) = -4$. Чему равны a и b?

б) Дано: $f(x) = a \cos 2x + b \sin 4x$, $f'\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 4$, $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$. Чему равны a и b?

○42.24. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$;

б) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$;

в) $f(x) = \sin^4 x$;

г) $f(x) = \cos^3 x - \sin^3 x$.

○42.25. Решите неравенство $y' \leqslant 0$, если:

а) $y = \frac{(1 - 3x)^3}{(2 - 7x)^5}$;

б) $y = \frac{(2x + 3)^4}{(2 - 5x)^5}$.

○**42.26.** Решите неравенство $g'(x) > 0$, если:

а) $g(x) = \frac{(2x-1)^4}{(3x+2)^5}$;
б) $g(x) = \frac{(4-3x)^4}{(5x-4)^3}$.

○**42.27.** Проверьте равенство $g'(x) = f(x)$, если:

а) $g(x) = (1 - x^2)\sin x^2 - \cos x^2$, $f(x) = 2(x - x^3)\cos x^2$;

б) $g(x) = (x^2 - 1{,}5)\cos 2x - x\sin 2x$, $f(x) = (2 - 2x^2)\sin 2x$.

○**42.28.** Найдите значения аргумента, удовлетворяющие условию $f'(x) = g'(x)$, если:

а) $f(x) = \sin(2x - 3)$, $g(x) = \cos(2x - 3)$;

б) $f(x) = \sqrt{3x - 10}$, $g(x) = \sqrt{14 + 6x}$.

○**42.29.** Определите абсциссы точек, в которых касательные к графику функции $y = h(x)$ образуют с положительным направлением оси абсцисс заданный угол α:

а) $h(x) = 2 \cdot \sqrt{2x - 4}$, $\alpha = 60°$;

б) $h(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\alpha = 0°$.

Известна производная функции $y = f'(x)$. Укажите, какой формулой можно задать функцию $y = f(x)$:

○**42.30.** а) $f'(x) = 6(2x - 1)^2$;
б) $f'(x) = -20(4 - 5x)^3$.

○**42.31.** а) $f'(x) = \frac{2}{(2x+3)^2}$;
б) $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x - 7}}$.

○**42.32.** а) $f'(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$;
б) $f'(x) = \frac{4}{\cos^2(5x - 1)}$.

○**42.33.** Найдите производную функции:

а) $y = \arcsin 3x$;

б) $y = \operatorname{arctg} x^2$;

в) $y = (\arccos x)^3$;

г) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$.

●**42.34.** Найдите значение производной функции в точке x_0:

а) $y = (\arccos x)^3$, $x_0 = 0$;

б) $y = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$, $x_0 = -1$;

в) $y = \arcsin\sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

г) $y = \arccos\frac{2 - x}{x\sqrt{2}}$, $x_0 = 1$.

○42.35. Вычислите скорость изменения функции $y = g(x)$ в точке x_0:

а) $g(x) = \operatorname{arctg}(1 - 3x)$, $x_0 = \frac{1}{3}$;

б) $g(x) = \arcsin\sqrt{x}$, $x_0 = 0{,}25$;

в) $g(x) = \arccos(2x - 3)$, $x_0 = 1{,}5$;

г) $g(x) = \sqrt{\operatorname{arcctg} x}$, $x_0 = 0$.

○42.36. Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью x:

а) $h(x) = \arcsin(3x - 2)$, $x_0 = \frac{2}{3}$;

б) $h(x) = \arcsin x \cdot \arccos x$, $x_0 = 0$.

○42.37. а) Решите уравнение $f'(x) = 2$, если $f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$.

б) Найдите те значения x, при которых выполняется равенство $(f'(x))^2 = \frac{1}{x}$, где $f(x) = 2\arcsin\sqrt{x}$.

●42.38. Решите неравенство $(f'(x))^2 > 1$, если:

а) $f(x) = \arcsin 2x$;

б) $f(x) = 2\arccos\sqrt{x}$.

§ 43 УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

43.1. Определите знак углового коэффициента касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точках с абсциссами a, b, c:

а) рис. 90;

б) рис. 91.

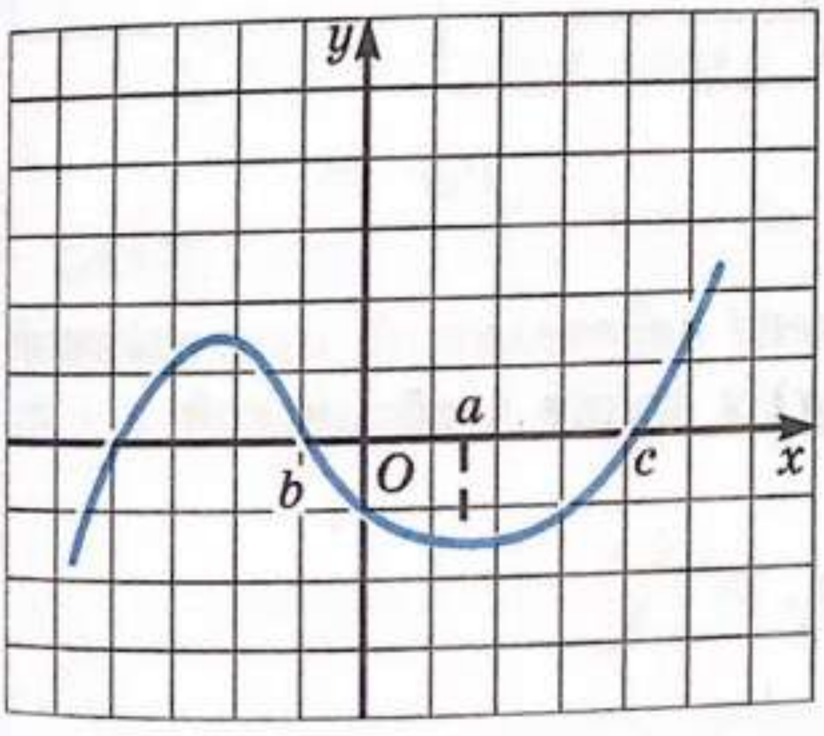


Рис. 90

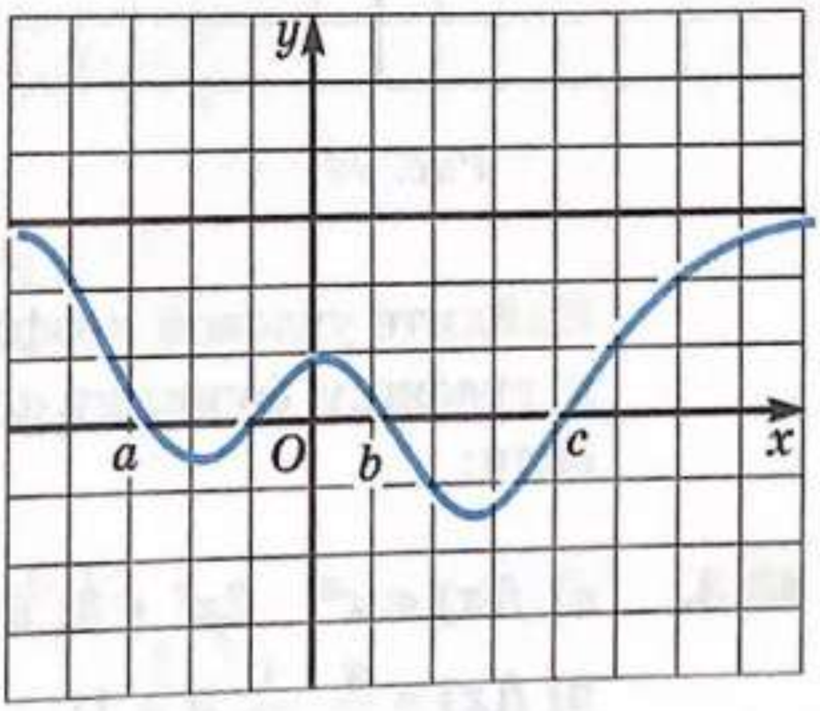


Рис. 91

43.2. Укажите точки, в которых производная равна нулю, и точки, в которых производная не существует, если график функции изображён на заданном рисунке:

а) рис. 92; б) рис. 93; в) рис. 94; г) рис. 95.

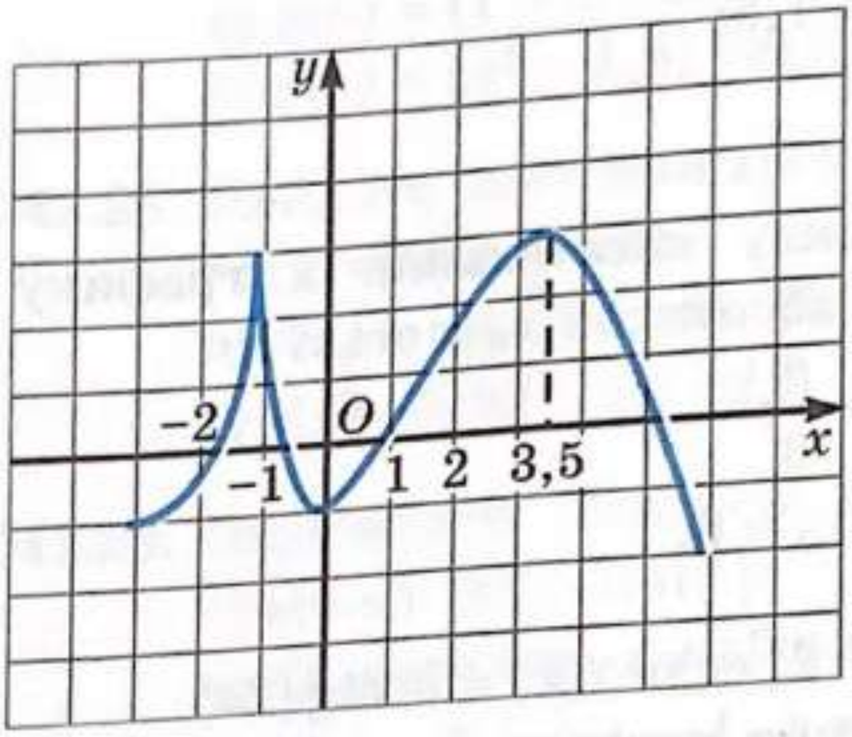


Рис. 92

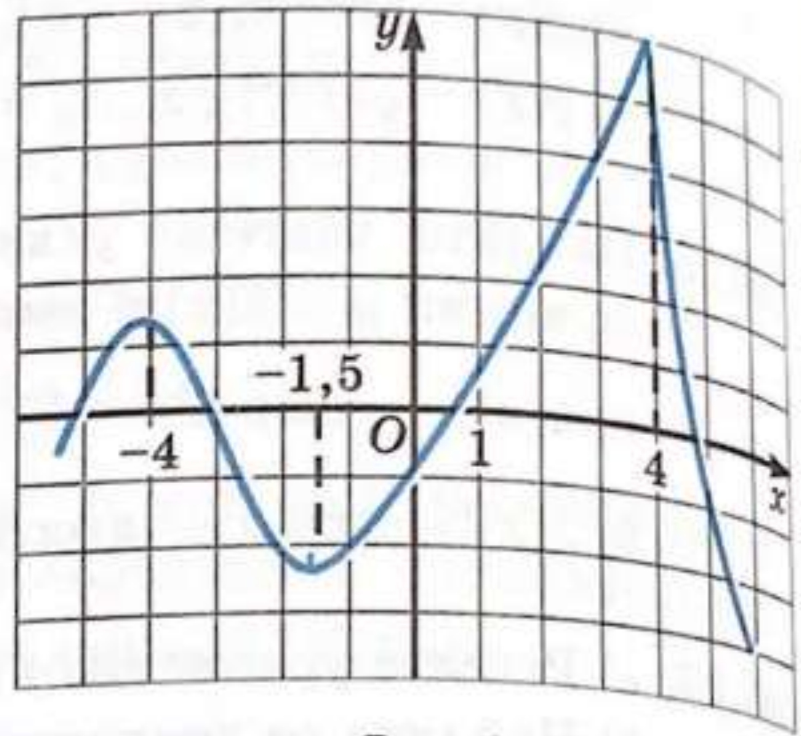


Рис. 93

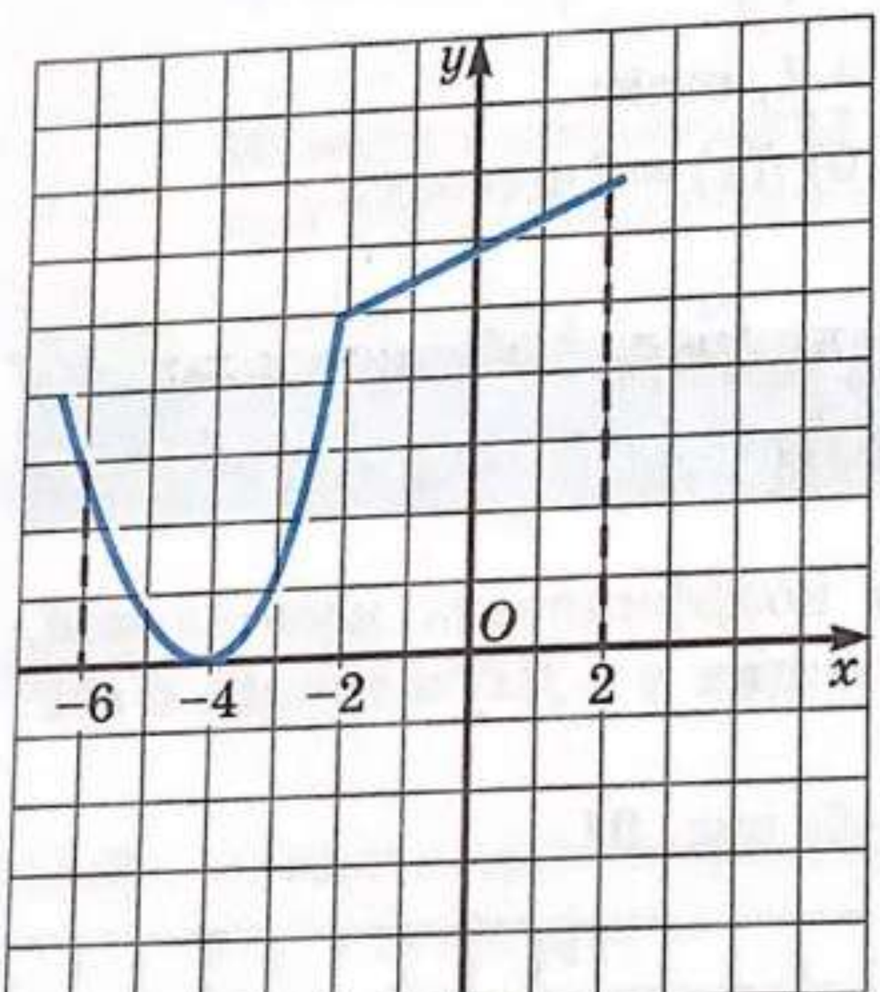


Рис. 94

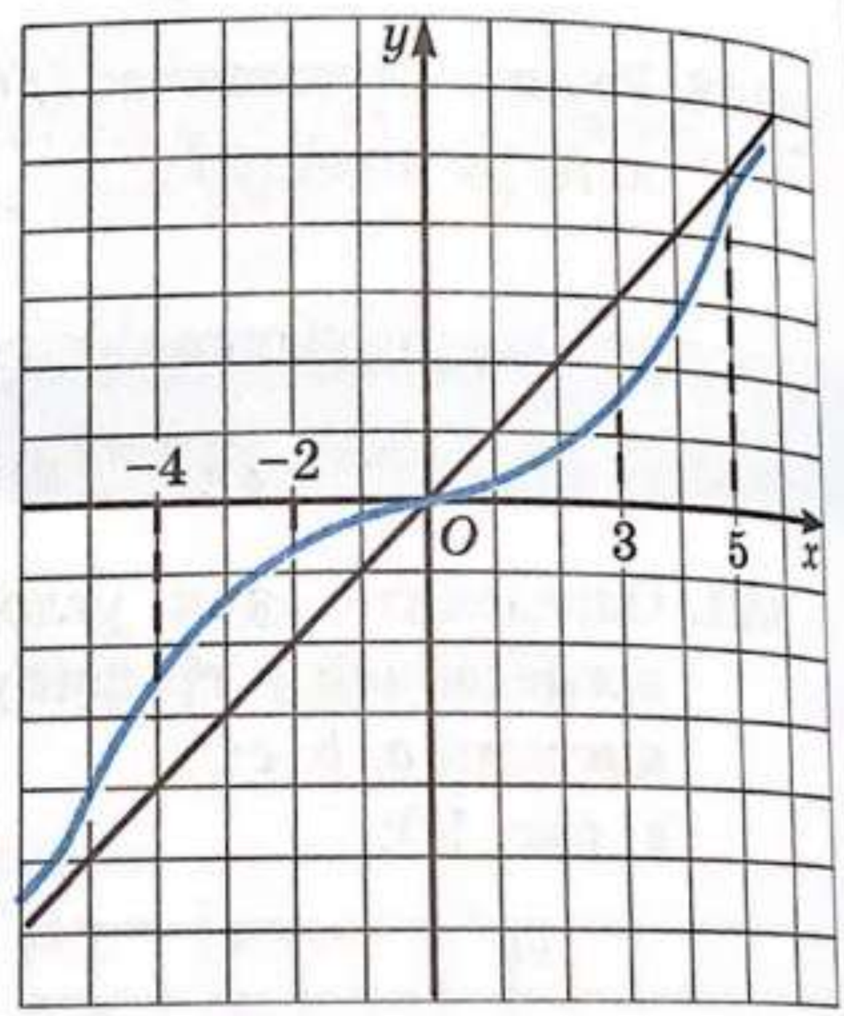


Рис. 95

Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

43.3. а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$, $a = -1$;

б) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$, $a = 1$;

в) $f(x) = x^4 - 7x^3 + 12x - 45$, $a = 0$;

г) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$, $a = 1$.

43.4. а) $f(x) = \sqrt{x - 7}$, $a = 8$;

б) $f(x) = \sqrt{4 - 5x}$, $a = 0$;

в) $f(x) = \sqrt{10 + x}$, $a = -5$;

г) $f(x) = \sqrt{3{,}5 - 0{,}5x}$, $a = -1$.

43.5. а) $f(x) = \sin x$, $a = 0$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $a = \dfrac{\pi}{8}$;

в) $f(x) = \cos 3x$, $a = \dfrac{\pi}{2}$;

г) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $a = \dfrac{\pi}{3}$.

о43.6. а) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, $a = \dfrac{\pi}{4}$;

б) $f(x) = \cos^2 x$, $a = \dfrac{\pi}{12}$;

в) $f(x) = \operatorname{ctg}^4 x$, $a = \dfrac{\pi}{4}$;

г) $f(x) = \sqrt{2 - \sin x}$, $a = \dfrac{\pi}{2}$.

Найдите тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

о43.7. а) $f(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, $x_0 = 3$;

б) $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

в) $f(x) = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$;

г) $f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

о43.8. а) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$, $x_0 = -2$;

в) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + x}{x^2}$, $x_0 = -0{,}1$;

г) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$, $x_0 = -5$.

Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в каждой из указанных точек:

○43.9. а) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ если } |x| \geqslant 1, \\ 1 - x^2, \text{ если } |x| < 1, \end{cases}$ $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3;$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 2 - x^2, \text{ если } x < 0, \end{cases}$ $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2;$

в) $f(x) = \begin{cases} -3x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \sqrt{5x}, \text{ если } x > 0, \end{cases}$ $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 5;$

г) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - 2x}, \text{ если } x \leqslant 2, \\ x - 2, \text{ если } x > 2, \end{cases}$ $x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5.$

○43.10. а) $f(x) = x^2 - 9|x| + 14,\ x_1 = -7,\ x_2 = 4{,}5,\ x_3 = 8;$
б) $f(x) = x^2 - 4|x| - 12,\ x_1 = -3,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2.$

○43.11. а) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2{,}5,\ x_3 = 4;$
б) $f(x) = |-x^2 + 2x + 3|,\ x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$

Найдите ту точку графика функции $y = f(x)$, в которой угловой коэффициент касательной равен k:

○43.12. а) $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 1,\ k = 2;$

б) $f(x) = x + \dfrac{1}{x},\ k = 3;$

в) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x,\ k = 1;$

г) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x},\ k = -3.$

○43.13. а) $f(x) = \arcsin 2x,\ k = 2;$

б) $f(x) = x - \arccos x,\ k = 2;$

в) $f(x) = 3 + \operatorname{arctg} x,\ k = \dfrac{1}{2};$

г) $f(x) = \operatorname{arcctg} 3x,\ k = 3.$

Какой угол образует с осью x касательная, проведённая к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

43.14. а) $f(x) = 4 + x^2,\ a = 2;$

в) $f(x) = (1 - x)^3,\ a = -3;$

б) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x},\ a = 3;$

г) $f(x) = 2x - x^3,\ a = 1?$

43.15. а) $f(x) = x^2$, $a = 0{,}5$;
б) $f(x) = -3x^3$, $a = \frac{1}{3}$;
в) $f(x) = 0{,}2x^5$, $a = -1$;
г) $f(x) = -0{,}25x^4$, $a = 0$?

43.16. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$, $a = 1$;
б) $f(x) = -7x^3 + 10x^2 + x - 12$, $a = 0$?

43.17. а) $f(x) = \frac{2x - 1}{3 - 2x}$, $a = \frac{1}{2}$;
б) $f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$, $a = 1$?

43.18. а) $f(x) = \sqrt{6x + 7}$, $a = 3\frac{1}{3}$;
б) $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$, $a = 2$?

43.19. а) $f(x) = \sqrt{3}\cos\frac{x}{3}$, $a = \frac{3\pi}{2}$;
б) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, $a = \frac{\pi}{2}$?

43.20. а) $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin\frac{x}{3}$, $a = 3\pi$;
б) $f(x) = \cos x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, $a = \frac{\pi}{3}$?

○**43.21.** а) $f(x) = |2x - x^2|$, $a = 1$;
б) $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$, $a = -2$;
в) $f(x) = |x^2 + 4x|$, $a = -3$;
г) $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$, $a = -1$?

Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

43.22. а) $f(x) = x^2$, $a = 3$;
б) $f(x) = 2 - x - x^3$, $a = 0$;
в) $f(x) = x^3$, $a = 1$;
г) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $a = -1$.

○**43.23.** а) $f(x) = \frac{3x - 2}{3 - x}$, $a = 2$;
б) $f(x) = \frac{1}{(x + 2)^3}$, $a = -3$;
в) $f(x) = \frac{2x - 5}{5 - x}$, $a = 4$;
г) $f(x) = \frac{1}{4(2x - 1)^2}$, $a = 1$.

○**43.24.** а) $f(x) = 2\sqrt{3x - 5}$, $a = 2$;
б) $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$, $a = 3$.

○**43.25.** а) $f(x) = \cos\frac{x}{3}$, $a = 0$;
б) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$, $a = \frac{\pi}{4}$;
в) $f(x) = \sin 2x$, $a = \frac{\pi}{4}$;
г) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $a = 0$.

○ **43.26.** а) $f(x) = \arccos 3x + 2x,\ a = 0;$

б) $f(x) = 3x^2 - 0{,}2 \arcsin 5x,\ a = 0;$

в) $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x + 3\sqrt{x},\ a = 1;$

г) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 5 \operatorname{arcctg} 2x,\ a = 1.$

● **43.27.** а) $f(x) = \sin^3 2x,\ a = \dfrac{\pi}{12};$

б) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\operatorname{arctg} 3x},\ a = \dfrac{1}{3};$

в) $f(x) = \cos^2 2x,\ a = \dfrac{\pi}{8};$

г) $f(x) = 2 \operatorname{arcctg}(3x^2) + 3 \operatorname{arctg}(2x^3),\ a = 0.$

○ **43.28.** а) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, \text{ если } x \geqslant -3, \\ -2x - 3, \text{ если } x < -3, \end{cases}\ a = -2;$

б) $f(x) = |x^2 - 3x|,\ a = 4;$

в) $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -4x, \text{ если } x < 0, \end{cases}\ a = 1;$

г) $f(x) = x^2 - 7|x| + 10,\ a = -1.$

○ **43.29.** Напишите уравнения касательных к графику функции $y = f(x)$ в точках его пересечения с осью абсцисс, если:

а) $f(x) = 9 - x^2;$

б) $f(x) = x^3 - 27;$

в) $f(x) = x^3 - 4x;$

г) $f(x) = x^3 - x^4.$

○ **43.30.** Напишите уравнения касательных к параболе:

а) $y = x^2 - 3x$ в точках с ординатой 4;

б) $y = -x^2 + 5x$ в точках с ординатой 6.

○ **43.31.** В какой точке касательная к графику функции $y = x^2$ параллельна заданной прямой:

а) $y = 2x + 1;$

б) $y = -\dfrac{1}{2}x + 5;$

в) $y = \dfrac{3}{4}x - 2;$

г) $y = -x + 5?$

○ **43.32.** Напишите уравнения тех касательных к графику функции $y = \dfrac{x^3}{3} - 2$, которые параллельны заданной прямой:

а) $y = x - 3;$

б) $y = 9x - 5.$

○**43.33.** Напишите уравнения тех касательных к графику функции $y = \arcsin x$, которые параллельны заданной прямой:
а) $y = 2x - 3$; б) $y = x + 2$.

В какой точке графика заданной функции $y = f(x)$ касательная параллельна заданной прямой:

○**43.34.** а) $y = 3 + x$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x - 4$;

б) $y = 0$, $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 8$;

в) $y = x - 3$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 7$;

г) $y = 2$, $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^3 + 6$?

○**43.35.** а) $f(x) = \sin x$, $y = -x$; в) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $y = x$;

б) $f(x) = \cos 3x$, $y = 0$; г) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $y = -1$?

○**43.36.** а) $f(x) = \cos^2 x$, $y = -x + 3$;
б) $f(x) = \operatorname{arcctg}(x^2)$, $y = -3$;
в) $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $y = 5$;
г) $f(x) = (\arcsin x)^2$, $y = -5$?

К графику заданной функции проведите касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y = 2 - x$:

○**43.37.** а) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - x$; б) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - x$.

○**43.38.** а) $y = \frac{3x + 7}{x - 3}$; б) $y = \frac{x + 9}{x + 8}$.

○**43.39.** а) $y = -4\sqrt{x + 7}$; б) $y = \sqrt{1 - 2x}$.

○**43.40.** а) $y = \arccos x$; б) $y = \operatorname{arcctg} x$.

○**43.41.** а) На графике функции $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$ найдите точки, в которых касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°. Составьте уравнения этих касательных.

б) На графике функции $y = \frac{3x + 7}{x + 2}$ найдите точки, в которых касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 135°. Составьте уравнения этих касательных.

○43.42. Составьте уравнение той касательной к графику функции $y = f(x)$, которая образует с осью x заданный угол α, если:

а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x^3 - 3\sqrt{3}x$, $\alpha = 60°$;

б) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3}}x - \frac{\sqrt{3}}{3}x^3$, $\alpha = 30°$.

○43.43. а) Вычислите координаты точек пересечения с осью y тех касательных к графику функции $y = \frac{3x - 1}{x + 8}$, которые образуют угол 45° с осью x.

б) Вычислите координаты точек пересечения с осью y тех касательных к графику функции $y = \frac{x + 4}{x - 5}$, которые образуют угол 135° с осью x.

○43.44. Составьте уравнение параболы $y = x^2 + bx + c$, касающейся прямой $y = -x$ в точке $M(1; -1)$.

○43.45. Проведите касательную к графику функции $y = x^2 + 1$, проходящую через точку A, не принадлежащую этому графику, если:

а) $A(-1; -2)$; б) $A(0; 0)$; в) $A(0; -3)$; г) $A(-1; 1)$.

○43.46. Через данную точку B проведите касательную к графику функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = -x^2 - 7x + 8$, $B(1; 1)$;

б) $f(x) = -x^2 - 7x + 8$, $B(0; 9)$.

Через данную точку B проведите касательную к графику функции $y = f(x)$:

43.47. а) $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $B(-2; 3)$;

б) $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $B(4; 0)$.

43.48. а) $f(x) = \sqrt{4x - 3}$, $B(2; 3)$;

б) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, $B(1; 2)$.

43.49. а) Найдите все значения x, при каждом из которых касательная к графику функции $y = \cos 7x + 7\cos x$ в точках с абсциссой x параллельна касательной к этому же графику в точке с абсциссой $\frac{\pi}{6}$.

б) Найдите все значения a, при каждом из которых касательные к графикам функций $y = 2 - 14\sin 3x$ и $y = 6\sin 7x$ в точках с абсциссой $x = a$ параллельны.

43.50. а) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$, отсекающей от осей координат треугольник, площадь которого равна 2,25.

б) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$, $x < 0$, отсекающей от осей координат треугольник, площадь которого равна $\frac{9}{8}$.

43.51. а) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3$, $x > 0$, отсекающей от осей координат треугольник, площадь которого равна $\frac{2}{3}$.

б) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3$, $x < 0$, отсекающей от осей координат треугольник, площадь которого равна $\frac{27}{8}$.

43.52. а) На оси y взята точка B, из неё проведены касательные к графику функции $y = 3 - \frac{1}{2}x^2$. Известно, что эти касательные образуют между собой угол 90°. Найдите координаты точки B.

б) Составьте уравнения тех касательных к графику функции $y = 0{,}5x^2 - 2{,}5$, которые пересекаются под углом 90° в точке, лежащей на оси y.

●43.53. а) На оси y взята точка B, из неё проведены касательные к графику функции $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Известно, что эти касательные образуют между собой угол $60°$. Найдите координаты точки B.

б) Составьте уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{\sqrt{3}}{6}(1 - x^2)$, которые пересекаются под углом $120°$ в точке, лежащей на оси y.

●43.54. а) Найдите точку пересечения касательных к графику функции $y = x^2 - |2x - 6|$, проведённых через точки с абсциссами $x = 5$, $x = -5$.

б) Найдите точку пересечения касательных к графику функции $y = x^3 + |x - 1|$, проведённых через точки с абсциссами $x = 2$, $x = -2$.

●43.55. а) При каких значениях параметра p касательная к графику функции $y = x^3 - px$ в точке $x = 1$ проходит через точку $(2; 3)$?

б) При каких значениях параметра p касательная к графику функции $y = x^3 + px^2$ в точке $x = 1$ проходит через точку $(3; 2)$?

●43.56. Является ли прямая $y = 4x - 5$ касательной к графику заданной функции? Если да, то найдите координаты точки касания:

а) $y = x^3 + x^2 - x - 2$; б) $y = x^3 - 2x^2 - 7x - 13$.

○43.57. Найдите все такие значения параметра a, при которых касательные, проведённые к графикам функций $y = f(x)$ в точке $(a; f(a))$ и $y = g(x)$ в точке $(a; g(a))$, параллельны:

а) $f(x) = x^6$; $g(x) = x^7$; б) $f(x) = x^4$; $g(x) = x^5$.

●43.58. а) При каких значениях параметра a прямая $y = ax + 1$ является касательной к графику функции $y = \sqrt{4x + 1}$?

б) При каких значениях параметра a прямая $y = 2x + a$ является касательной к графику функции $y = \sqrt{4x - 1}$?

●43.59. а) К графику функции $y = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, проведена касательная, параллельная прямой $y - 4x - 1 = 0$. Найдите ординату точки касания.

б) К графику функции $y = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, проведена касательная, параллельная прямой $3y - 6x + 2 = 0$. Найдите ординату точки касания.

43.60. а) Найдите наименьшее положительное значение x, при котором касательные к графикам функций $y = 3\cos\frac{5x}{2}$ и $y = 5\cos\frac{3x}{2} + 2$ параллельны.

б) Найдите наибольшее отрицательное значение x, при котором касательные к графикам функций $y = 2 - 14\sin 3x$ и $y = 6\sin 7x$ параллельны.

43.61. а) Точка A с абсциссой -1 и точка B с абсциссой 1 принадлежат графику функции $y = 2x^3 + 3x^2 - \frac{x}{2} + 1$. Найдите сумму абсцисс всех тех точек, в каждой из которых касательная к этому графику параллельна прямой AB.

б) Точка A с абсциссой -3 и точка B с абсциссой 3 принадлежат графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 22x - 28$. Найдите сумму абсцисс всех тех точек, в каждой из которых касательная к этому графику параллельна прямой AB.

43.62. а) Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $y = x^2 - x + 1$ и $y = x^2 + 5x + 4$.

б) Найдите точку пересечения общих касательных к графикам функций $y = x^2$ и $y = -x^2 - 8$.

43.63. Углом между кривыми называют угол между касательными к кривым в точке их пересечения. Под каким углом пересекаются кривые:

а) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$?

43.64. Докажите, что параболы $y = \frac{(x-1)^2}{2}$ и $y = \frac{(x+1)^2}{2}$ перпендикулярны в точке их пересечения.

43.65. а) Из какой точки оси y кривая $y = \sqrt{1 + x^2}$ видна под углом 120°?

б) Найдите множество точек координатной плоскости, из которых парабола $y = x^2$ видна под прямым углом.

●43.66. а) Найдите значение параметра a, при котором касательная к графику функции $y = x^3 + a^2x - a$ в точке $x = -1$ проходит через точку $M(1; 7)$.

б) Найдите значение параметра a, при котором касательная к графику функции $y = x^4 - 3x^3 + 2a$ в точке $x = -2$ проходит через точку $M(-1; -8)$.

●43.67. а) Найдите площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к графику функции $y = \sqrt{x^2 - 5}$ в точке $x = 3$.

б) Найдите площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к графику функции $y = \sqrt{x^2 - 9}$ в точке $x = 5$.

●43.68. а) Прямая $y = 6x - 7$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ в точке $M(2; 5)$. Найдите значения коэффициентов b и c.

б) Прямая $y = 7x - 10$ касается параболы $y = ax^2 + bx + c$ в точке $x = 2$. Найдите значения коэффициентов a, b и c, если известно, что парабола пересекает ось абсцисс в точке $x = 1$.

●43.69. Докажите, что треугольник, образованный касательной к гиперболе $y = \dfrac{a^2}{x}$ и осями координат, имеет постоянную площадь, а точка касания является центром окружности, описанной около этого треугольника. Рассмотрев чертёж к задаче, придумайте геометрический способ построения касательной к гиперболе.

●43.70. Докажите, что касательная к параболе $y = x^2$ в точке $x = a$ делит пополам отрезок $[0; a]$ оси абсцисс. Рассмотрев чертёж к задаче, придумайте геометрический способ построения касательной к параболе. Обобщите этот результат и этот способ построения касательной на любую степенную функцию $y = x^n$, где n — натуральное число, большее 2.

§ 44 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ

380 **Прочитайте п. 1 в § 44 учебника.**

44.1. Определите, какой знак имеет производная функции $y = f(x)$ в точках с абсциссами a, b, c, d:

а) рис. 96; б) рис. 97.

44.2. По графику производной функции $y = f(x)$, представленному на заданном рисунке, определите, на каких промежутках функция $y = f(x)$ возрастает, а на каких убывает:
а) рис. 98; б) рис. 99; в) рис. 100; г) рис. 101.

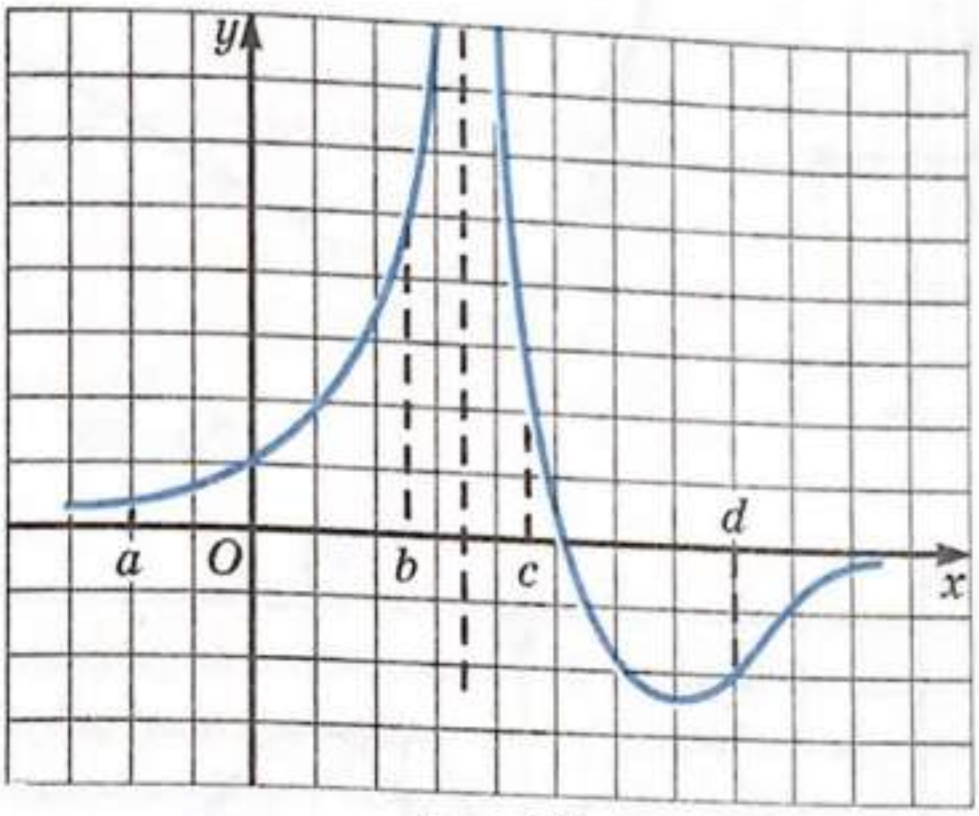


Рис. 96

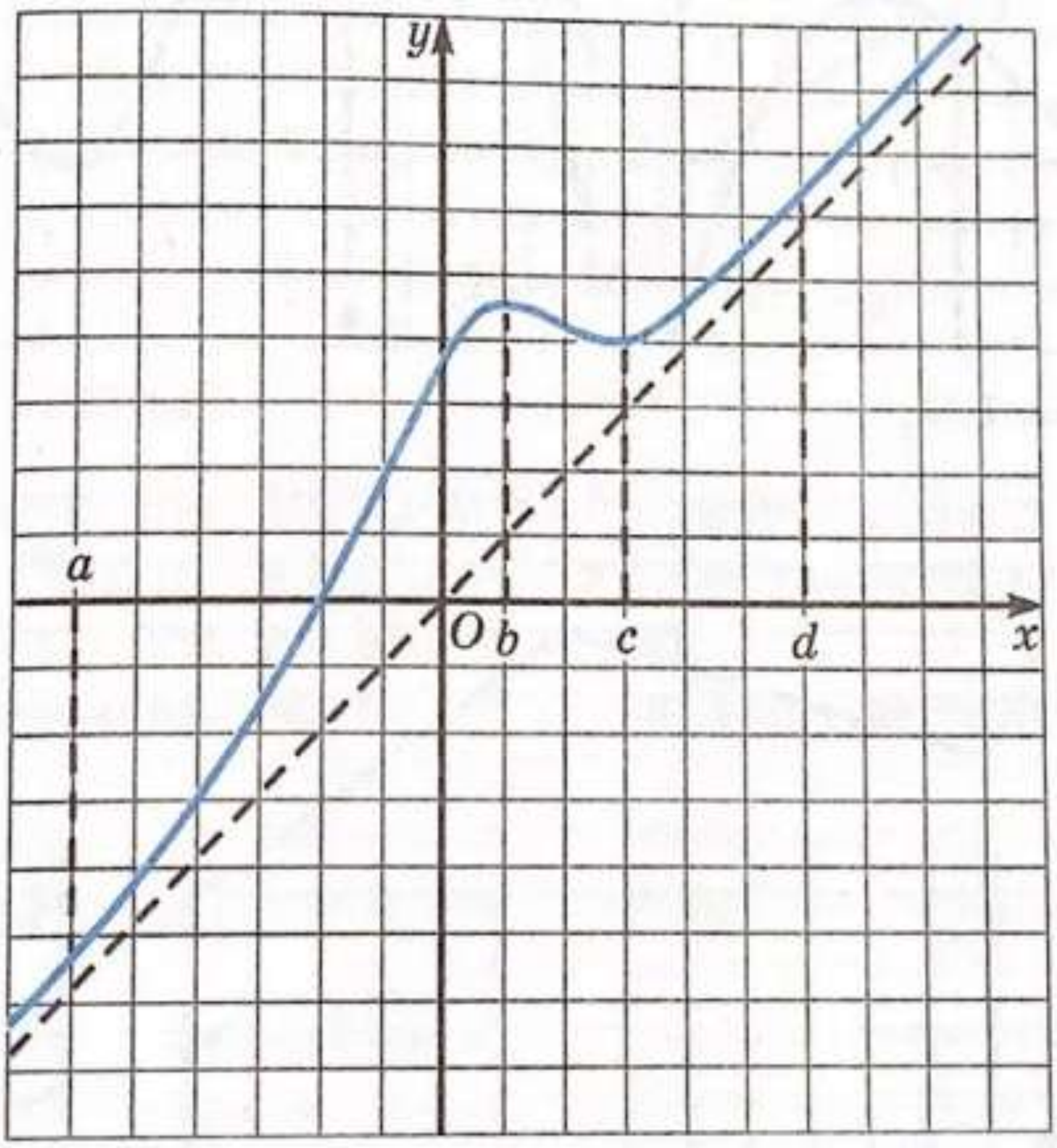


Рис. 97

44.3. На каком из указанных промежутков функция $y = f(x)$ убывает, если график её производной представлен на рис. 102:
а) $(-2; 1)$; б) $(-\infty; 4)$; в) $(4; +\infty)$; г) $(-\infty; -2)$?

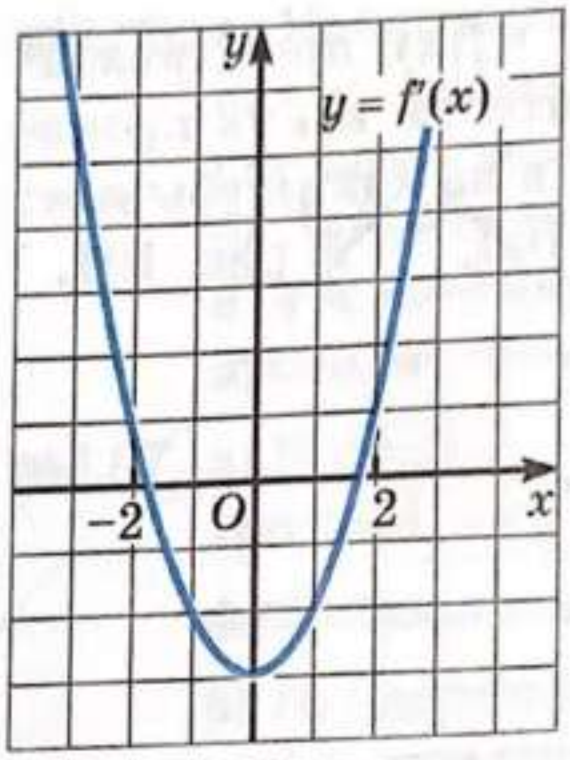


Рис. 98

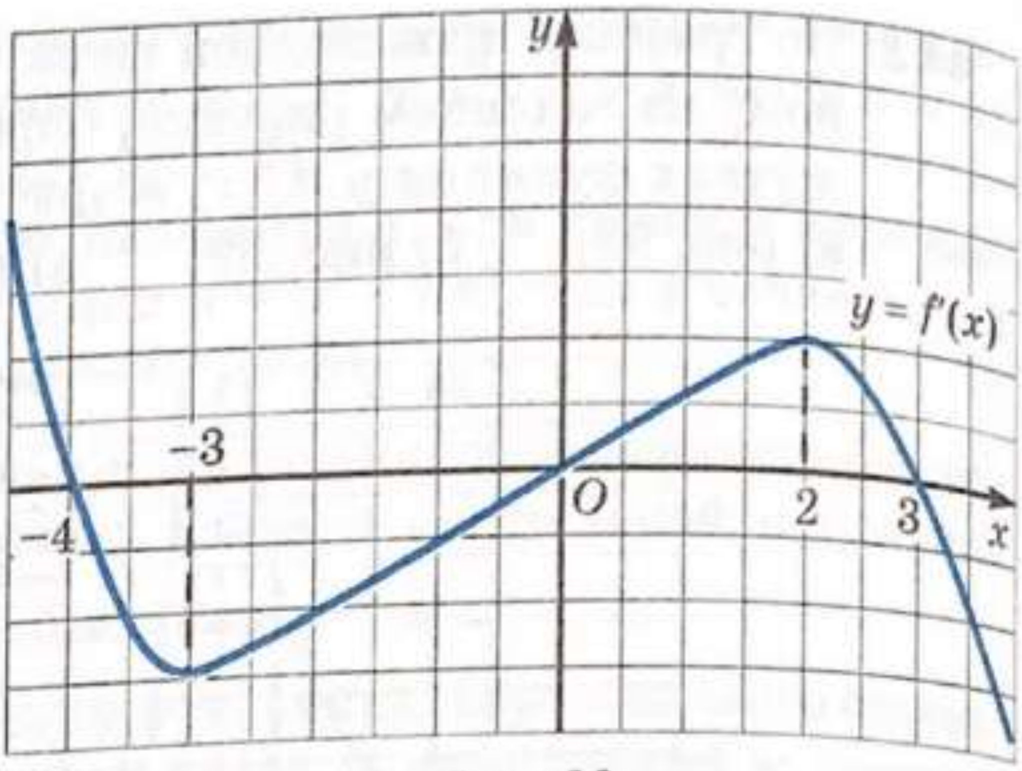


Рис. 99

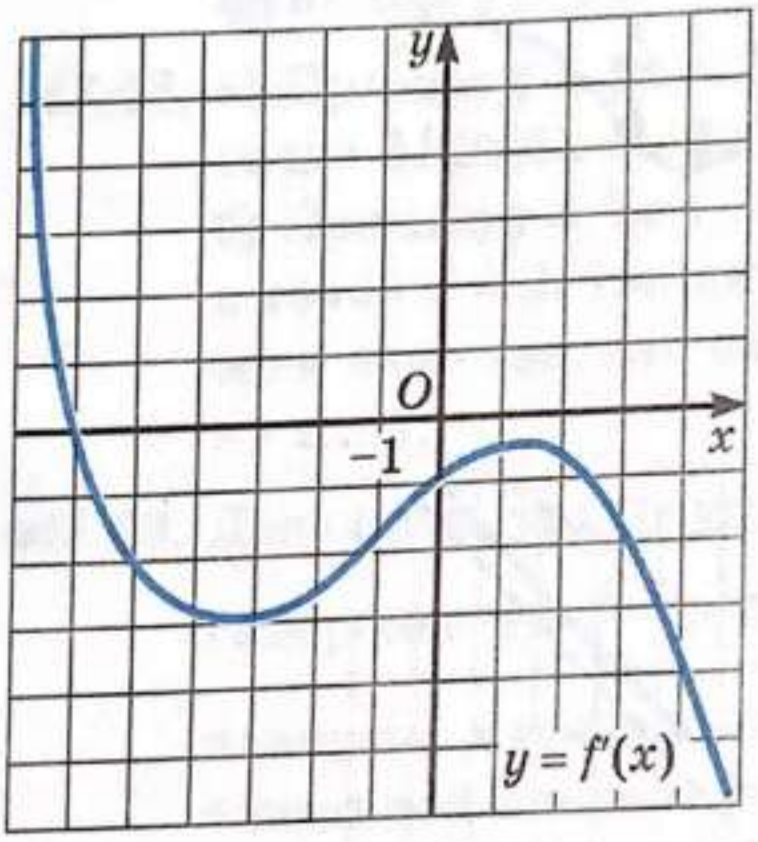


Рис. 100

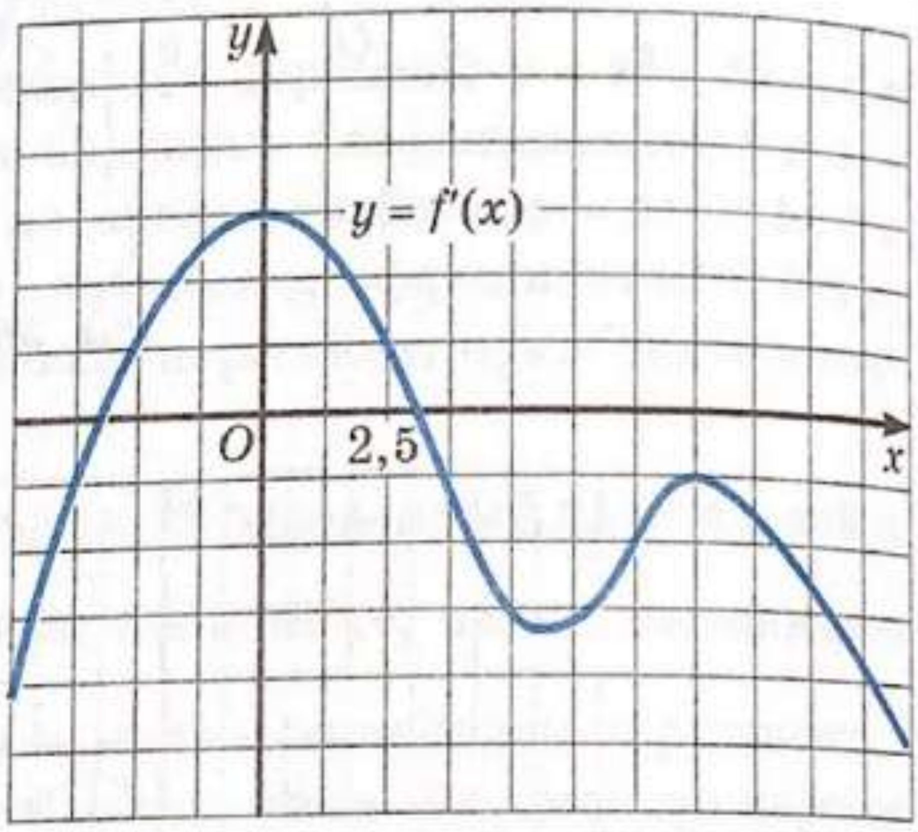


Рис. 101

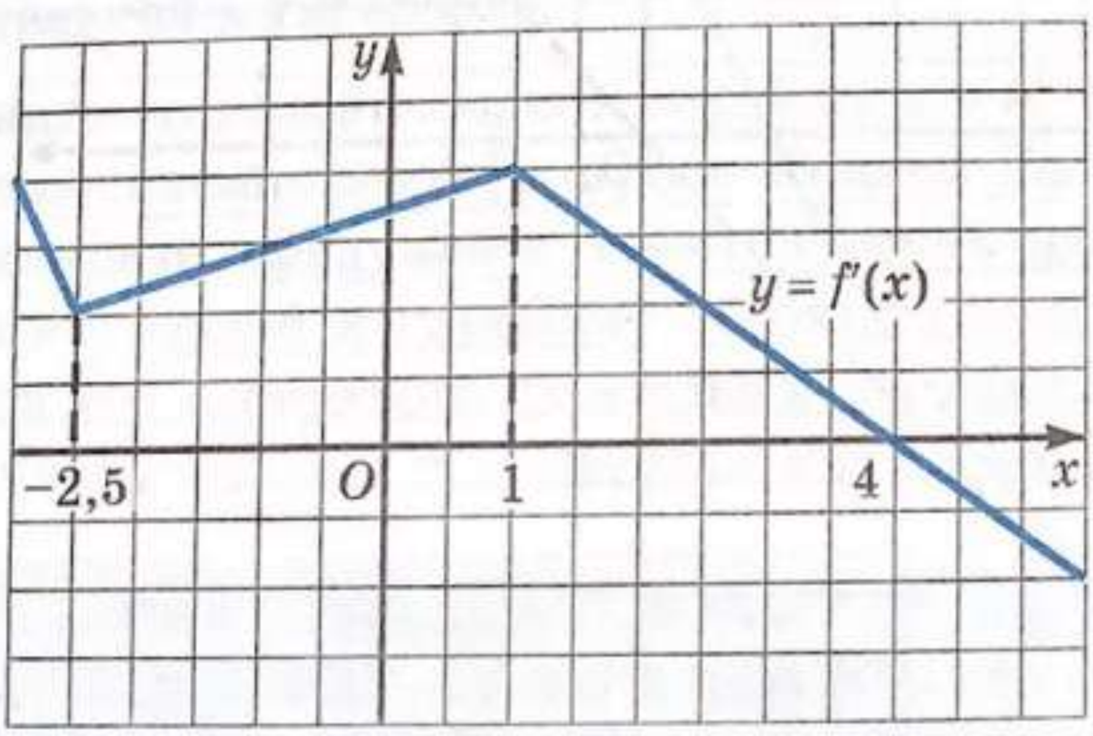


Рис. 102

44.4. Определите, для какой из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ отрезок $[-1; 1]$ является промежутком возрастания, если на рис. 103, 104, 105 изображены графики производных этих функций.

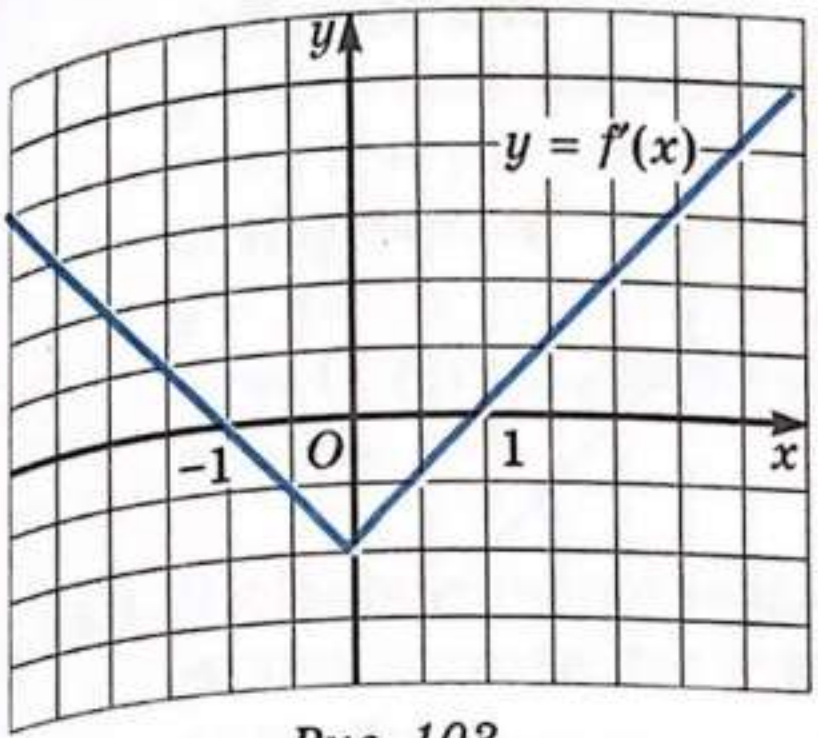


Рис. 103

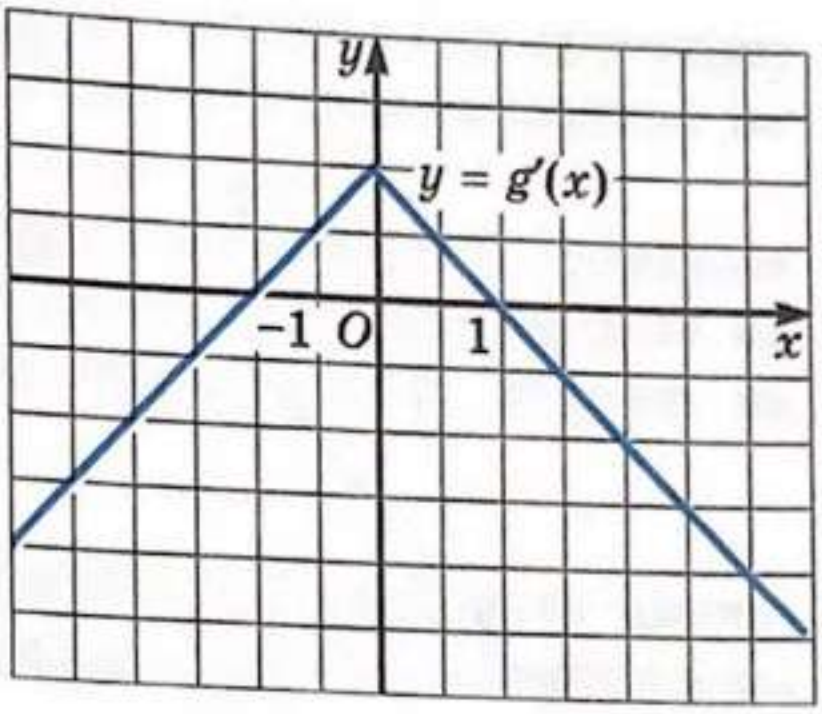


Рис. 104

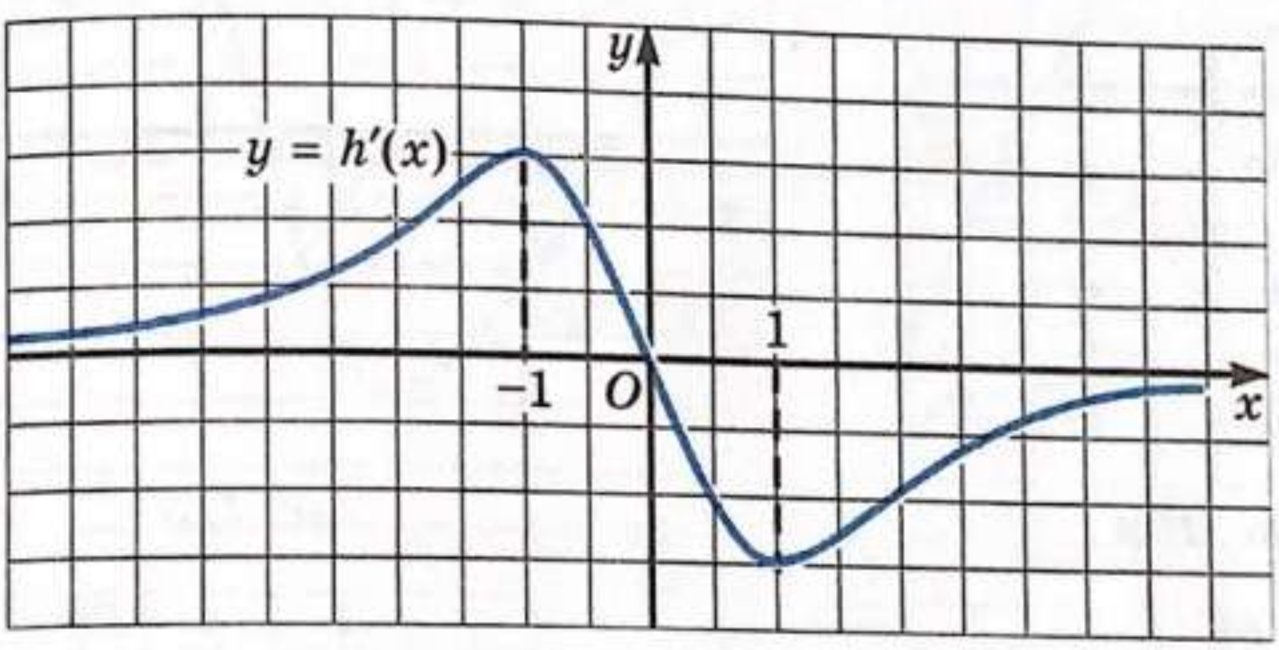


Рис. 105

44.5. На рис. 106, 107, 108 изображены графики производных $y = f'(x)$, $y = g'(x)$, $y = h'(x)$. Определите, какая из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$:

а) возрастает на $\boldsymbol{R}$; б) убывает на $\boldsymbol{R}$.

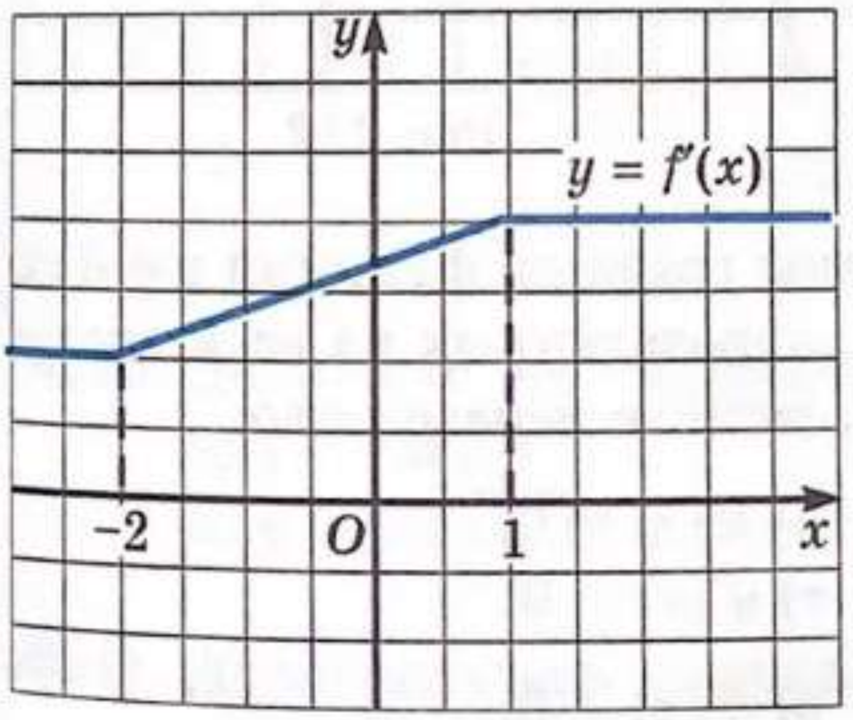


Рис. 106

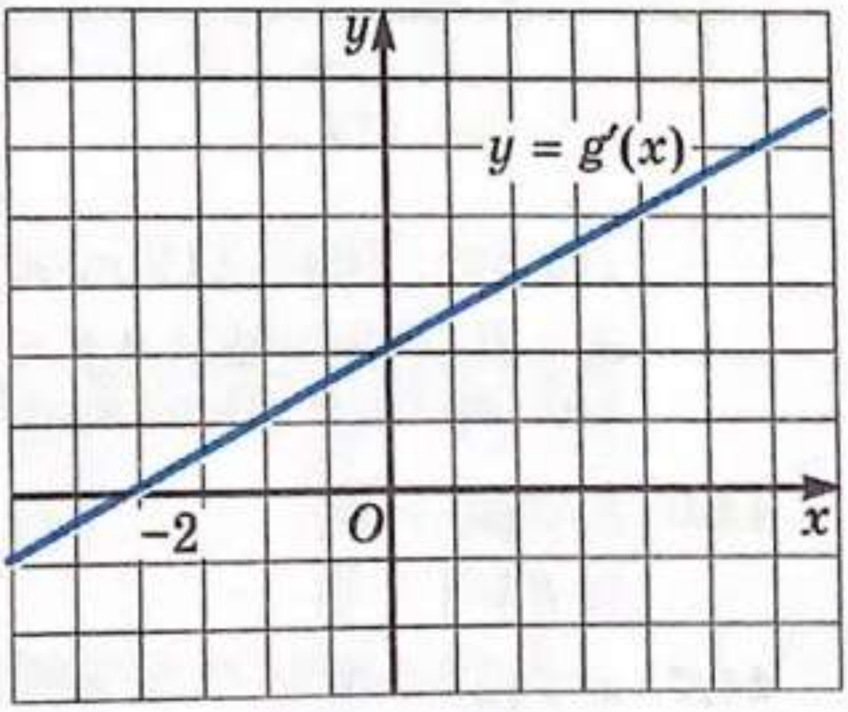


Рис. 107

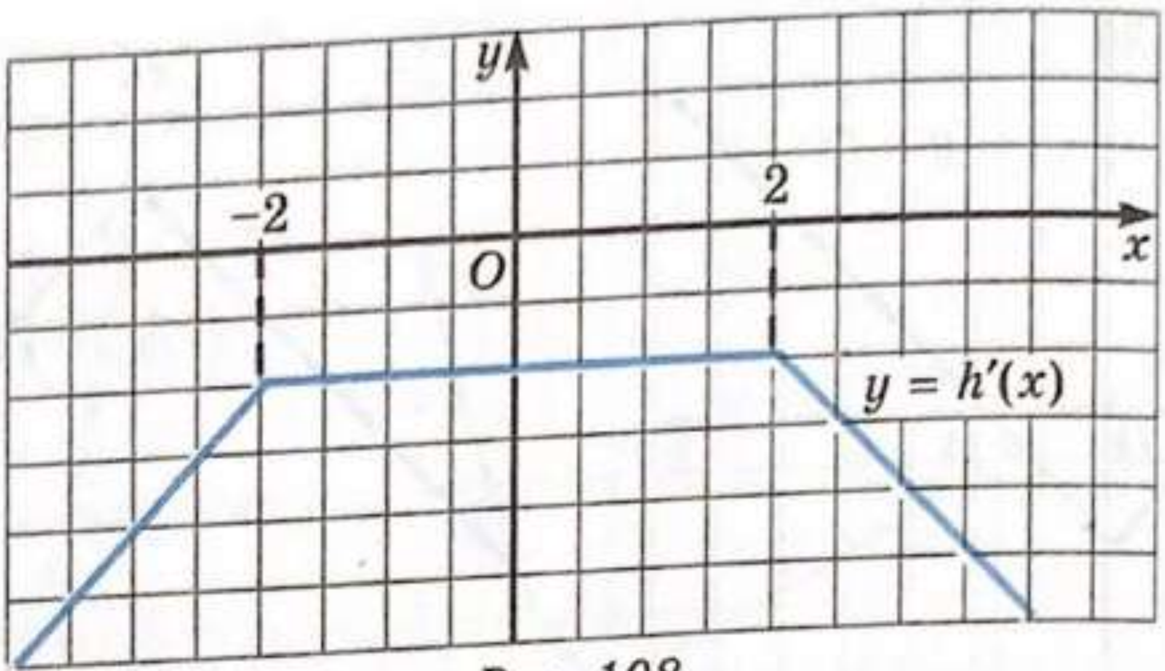


Рис. 108

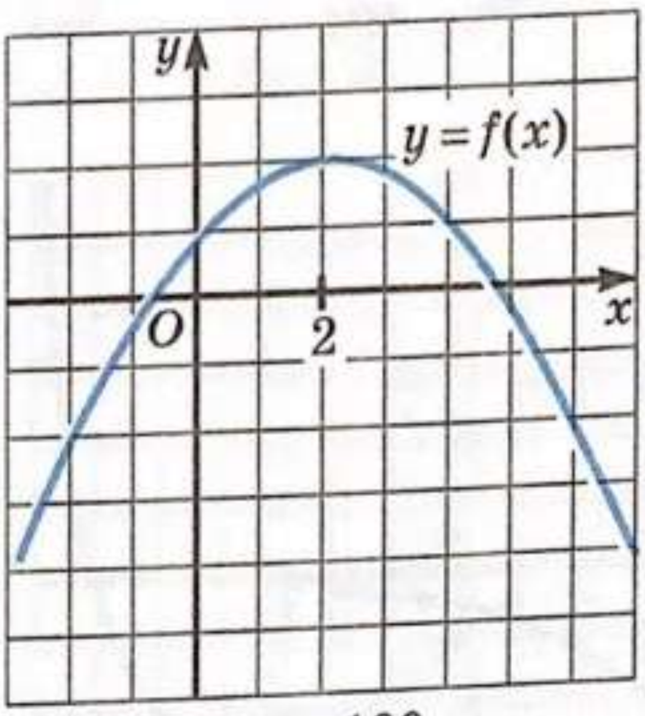


Рис. 109

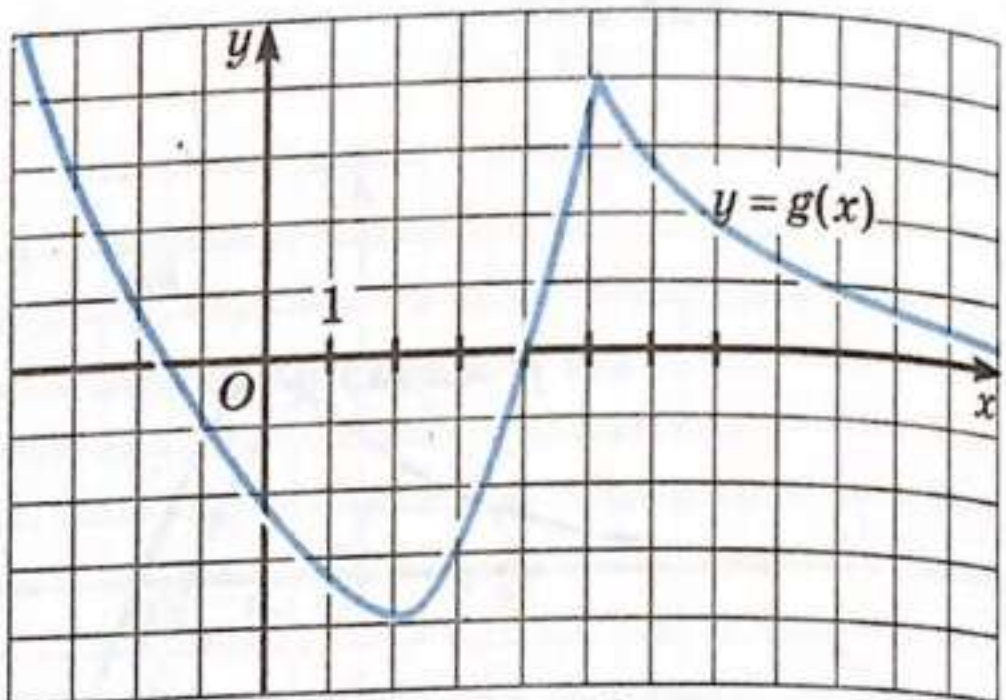


Рис. 110

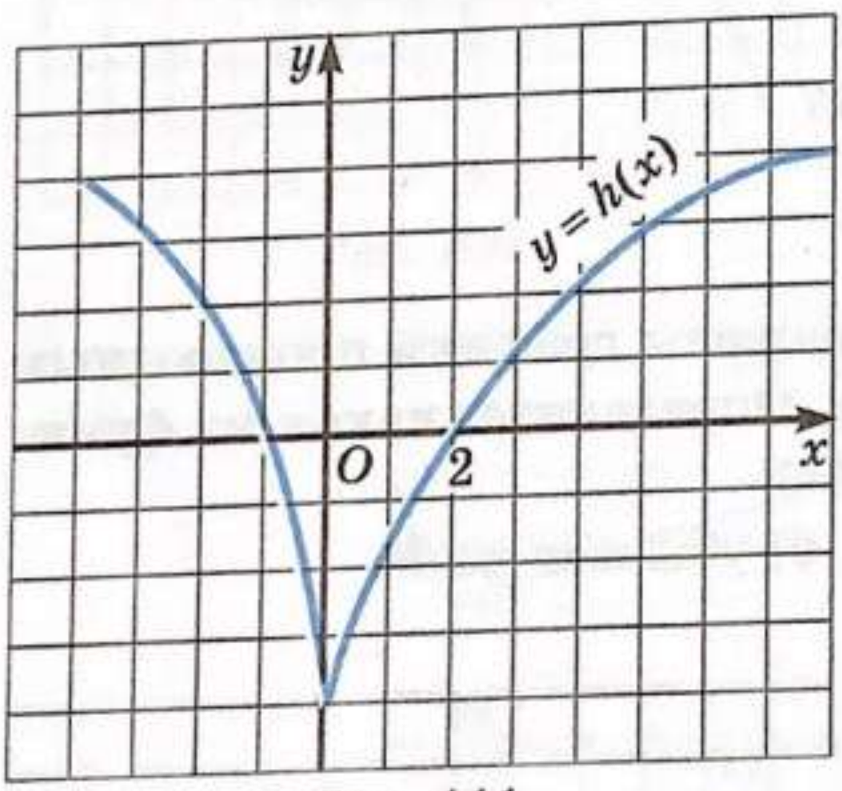


Рис. 111

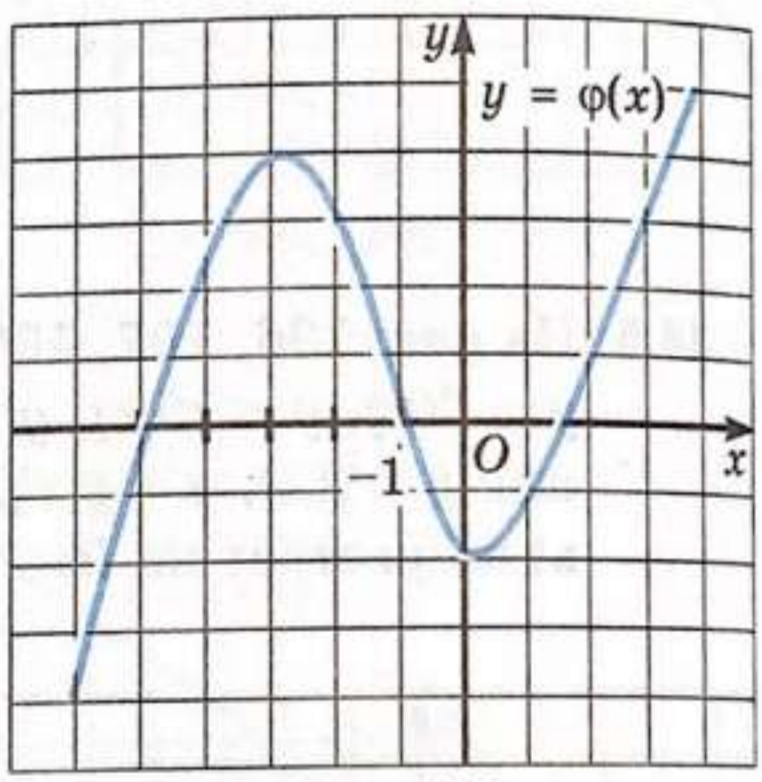


Рис. 112

На рис. 109—112 изображены графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ и $y = \varphi(x)$, определённых на всей числовой прямой. Используя их, решите неравенство:

44.6. а) $f'(x) > 0$; в) $h'(x) < 0$;
б) $g'(x) < 0$; г) $\varphi'(x) > 0$.

44.7. а) $f'(x) \leqslant 0$; в) $h'(x) \geqslant 0$;
б) $g'(x) \geqslant 0$; г) $\varphi'(x) \leqslant 0$.

44.8. а) Изобразите эскиз графика производной функции $y = f(x)$, если известно, что данная функция возрастает на $(-\infty; 1)$ и убывает на промежутке $(1; +\infty)$.

б) Изобразите эскиз графика производной функции $y = f(x)$, если известно, что данная функция убывает на луче $(-\infty; -1]$, возрастает на отрезке $[-1; 3]$, убывает на луче $[3; +\infty)$.

44.9. Изобразите эскиз графика функции $y = f(x)$, если промежутки постоянства знака производной $f'(x)$ представлены на схеме:

а) рис. 113; в) рис. 115;
б) рис. 114; г) рис. 116.

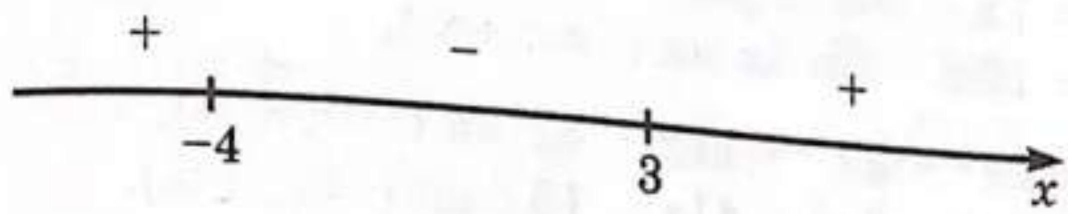


Рис. 113

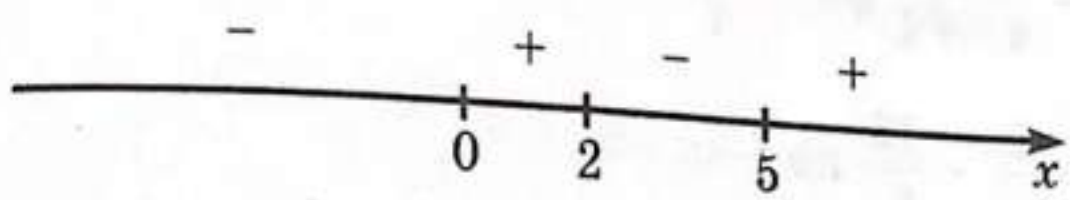


Рис. 114

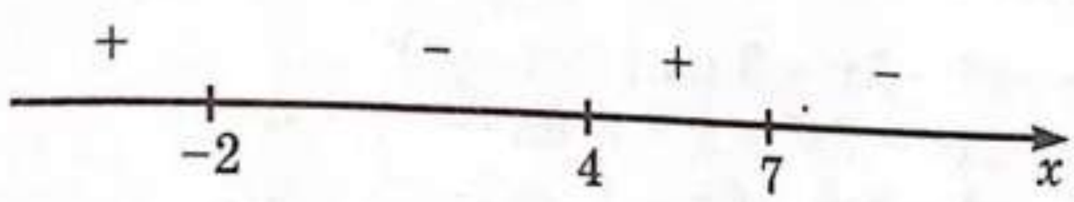


Рис. 115

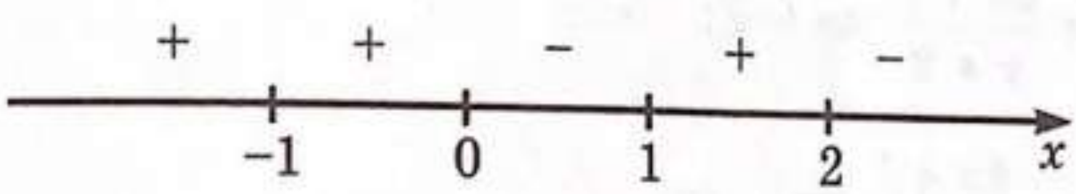


Рис. 116

○**44.10.** Докажите, что заданная функция возрастает на $\boldsymbol{R}$:

а) $y = \cos x + 2x$; в) $y = x^5 + 3x^3 + 7x + 4$;

б) $y = \sin x + x^3 + x$; г) $y = x^5 + 4x^3 + 8x - 8$.

○**44.11.** Докажите, что заданная функция убывает на $\boldsymbol{R}$:

а) $y = \sin 2x - 3x$; б) $y = \cos 3x - 4x$.

○**44.12.** Докажите, что функция монотонна на всей числовой прямой. Укажите характер монотонности:

а) $y = x^5 + 6x^3 - 7$;

б) $y = x - \cos x + 8$;

в) $y = \sin x - 2x - 15$;

г) $y = 11 - 5x - x^3$.

Докажите, что заданная функция возрастает:

○**44.13.** а) $y = x^5 + 3x - 6$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $y = 15 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}$ на $(-\infty; 0)$;

в) $y = x^7 + 7x^3 + 2x - 42$ на $(-\infty; +\infty)$;

г) $y = 21x - \frac{1}{x^5}$ на $(0; +\infty)$.

○**44.14.** а) $y = 7x - \cos 2x$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $y = 10x + \sin 3x$ на $(-\infty; +\infty)$.

○**44.15.** а) $y = 2x^3 + 2x^2 + 11x - 35$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $y = 3x^3 - 6x^2 + 41x - 137$ на $(-\infty; +\infty)$.

○**44.16.** а) $y = \frac{4x}{4x + 1}$ на $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$;

б) $y = \frac{2x - 13}{x - 5}$ на $(-\infty; 5)$.

Докажите, что заданная функция убывает:

○**44.17.** а) $y = -x^3 - 5x + 3$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $y = -2x^5 - 7x^3 - x + 8$ на $(-\infty; +\infty)$;

в) $y = -x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ на $(-\infty; +\infty)$;

г) $y = -4x^3 + 4x^2 - 2x + 9$ на $(-\infty; +\infty)$.

○**44.18.** а) $y = \frac{3x + 7}{x + 2}$ на $(-2; +\infty)$;

б) $y = \frac{-4x + 1}{2x + 1}$ на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

○**44.19.** а) $y = 7\cos x - 5\sin 3x - 22x$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $y = 3\cos 7x - 8\sin\frac{x}{2} - 25x + 1$ на $(-\infty; +\infty)$.

Определите промежутки монотонности функции:

○**44.20.** а) $y = x^3 + 2x$;

б) $y = 60 + 45x - 3x^2 - x^3$;

в) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$;
г) $y = -x^5 + 5x$.

○**44.21.** а) $y = \dfrac{3x-1}{3x+1}$; б) $y = \dfrac{1-2x}{3+2x}$.

○**44.22.** а) $y = \sqrt{3x-1}$; в) $y = \sqrt{1-2x}$;
б) $y = \sqrt{1-x} + 2x$; г) $y = \sqrt{2x-1} - x$.

○**44.23.** а) $y = \dfrac{x^2}{x^2+2}$; б) $y = -\dfrac{3x^2}{x^2+4}$.

○**44.24.** а) $y = \sin^2 x$; в) $y = \cos^2 x$;
б) $y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$; г) $y = \dfrac{1}{\sin^5 x}$.

○**44.25.** а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$; б) $y = \sqrt{5x - 2 - 2x^2}$.

●**44.26.** а) $y = \arcsin x^2$; в) $y = \arccos\sqrt{x}$;
б) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$; г) $y = \operatorname{arctg}^2 x$.

●**44.27.** а) $y = \begin{cases} 2x^3 - 6x, \text{ если } x \geqslant -1, \\ x^2 + 2x + 3, \text{ если } x < -1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 3x^4 - 4x^3, \text{ если } x \leqslant 2, \\ -x^2 + 4x + 12, \text{ если } x > 2. \end{cases}$

●**44.28.** а) $y = \begin{cases} x^5 - 5x^4 + 1, \text{ если } x \geqslant 0, \\ (x+2)^2 - 3, \text{ если } x < 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -3x^5 + 5x^3 - 2, \text{ если } x \geqslant -1, \\ \dfrac{4}{x}, \text{ если } x < -1. \end{cases}$

○**44.29.** Исследуйте на монотонность функцию $y = f(x)$ и постройте (схематически) её график:
а) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; в) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$;
б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; г) $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 7$.

○**44.30.** Постройте график функции $y = f(x)$, $x \in [0; 10]$, производная которой равна нулю на интервалах $(0; 2)$; $(2; 6)$; $(6; 10)$, если известно, что $f(1) = 0$, $f(5) = 3$, $f(8) = -2$.

При каких значениях параметра a функция возрастает на всей числовой прямой:

○**44.31.** а) $y = x^3 + ax$; б) $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 + 5x - 3$?

○**44.32.** а) $y = ax - \cos x$; б) $y = 2\sin 2x - ax$?

○**44.33.** При каких значениях параметра b функция убывает на всей области определения:

а) $y = 7 + bx - x^2 - x^3$; в) $y = x^3 + bx^2 + 3x + 21$;

б) $y = -2\sqrt{x+3} + bx$; г) $y = -2bx + \sqrt{1-x}$?

●**44.34.** При каких значениях параметра a функция $y = x^3 - 3x$:

а) убывает на отрезке $[a + 1; a + 3]$;

б) возрастает на отрезке $\left[a - \frac{1}{2}; 2a + 2\right]$;

в) убывает на отрезке $\left[a - 3; \frac{1}{6}a + \frac{2}{3}\right]$;

г) возрастает на отрезке $[a - 2{,}5; a - 0{,}5]$?

○**44.35.** а) При каких значениях параметра a функция $y = 2x^3 - 3x^2 + 7$ возрастает на интервале $(a - 1; a + 1)$?

б) При каких значениях параметра a функция $y = -x^3 + 3x + 5$ убывает на интервале $\left(a; a + \frac{1}{2}\right)$?

385 **Прочитайте п. 2 в § 44 учебника.**

○**44.36.** По графику функции $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, изображённому на заданном рисунке, определите точки, в которых её производная обращается в 0:

а) рис. 117; б) рис. 118; в) рис. 119; г) рис. 120.

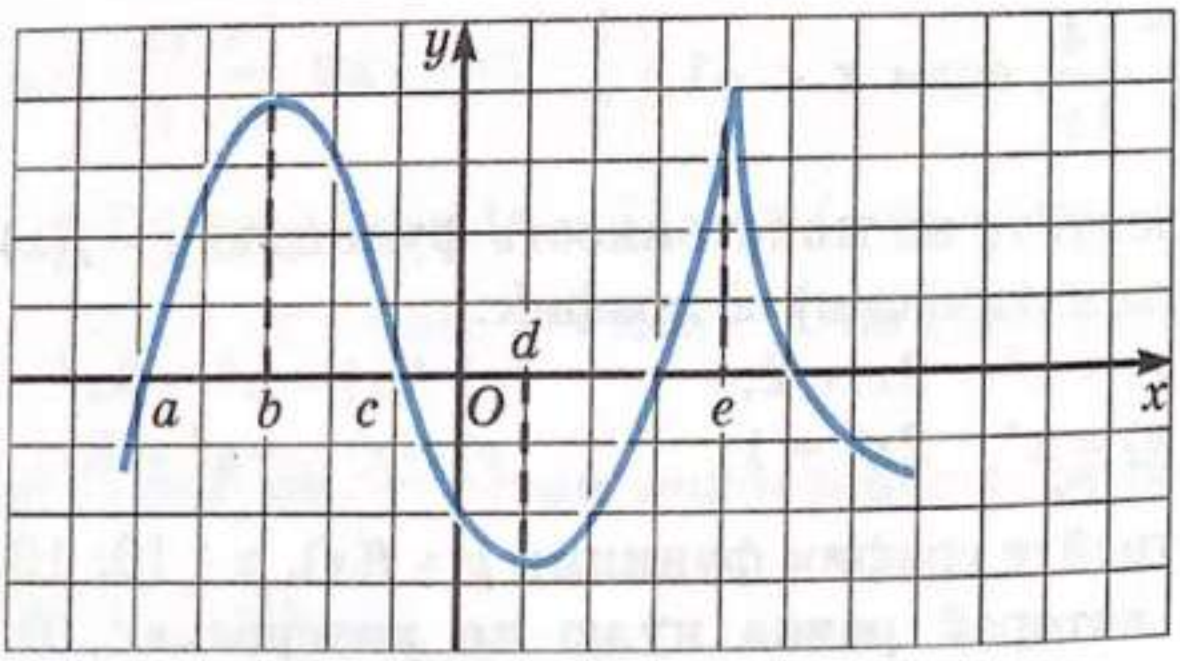


Рис. 117

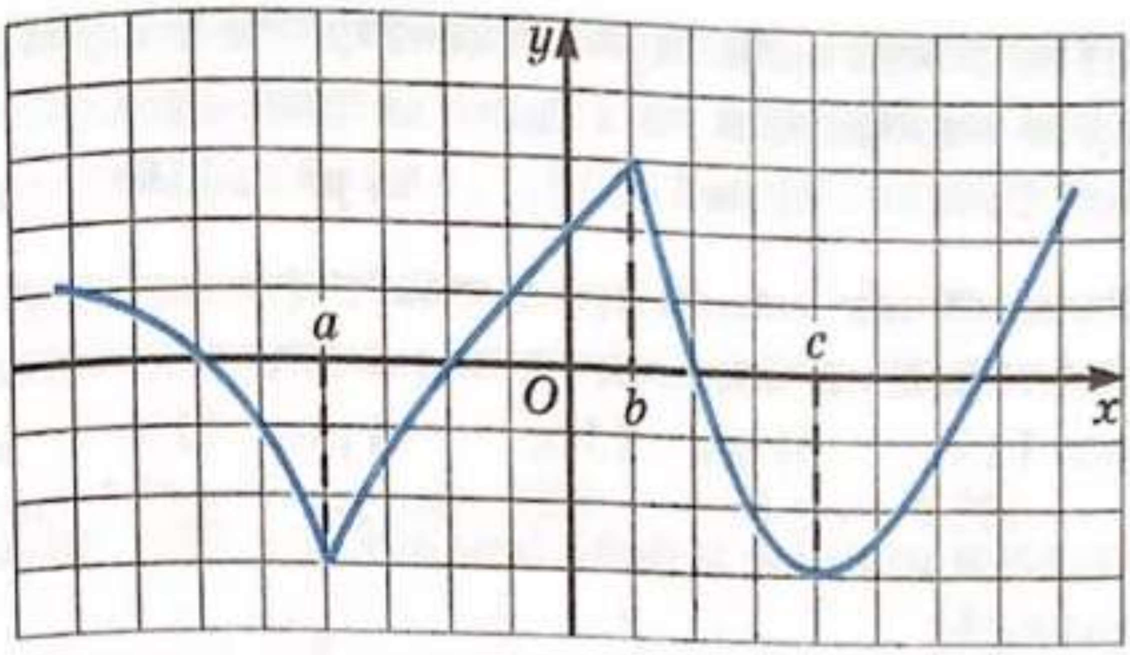


Рис. 118

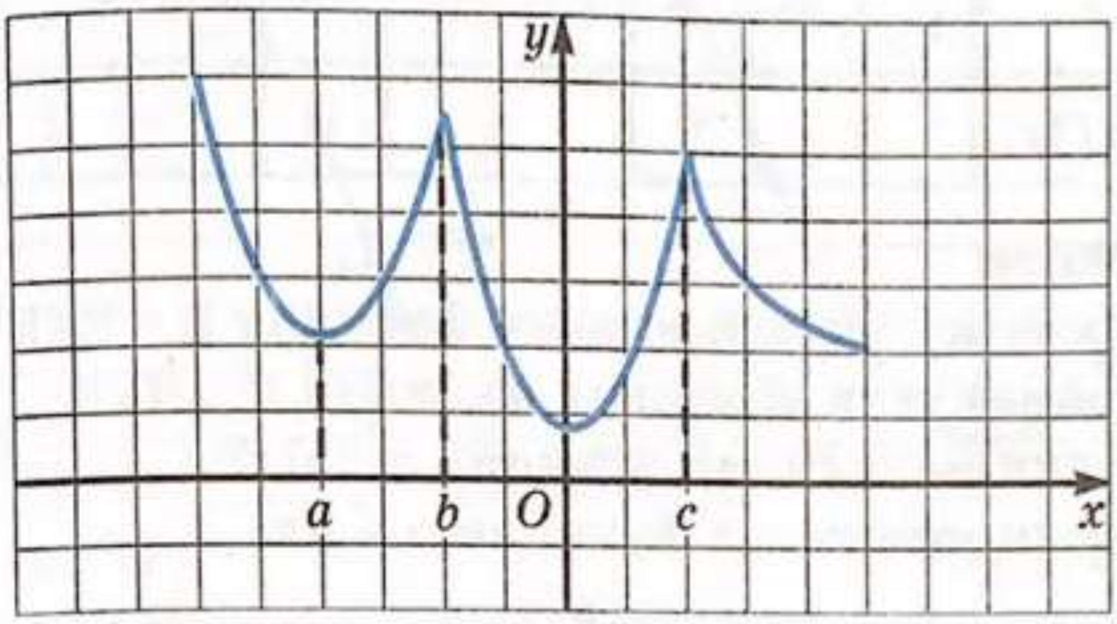


Рис. 119

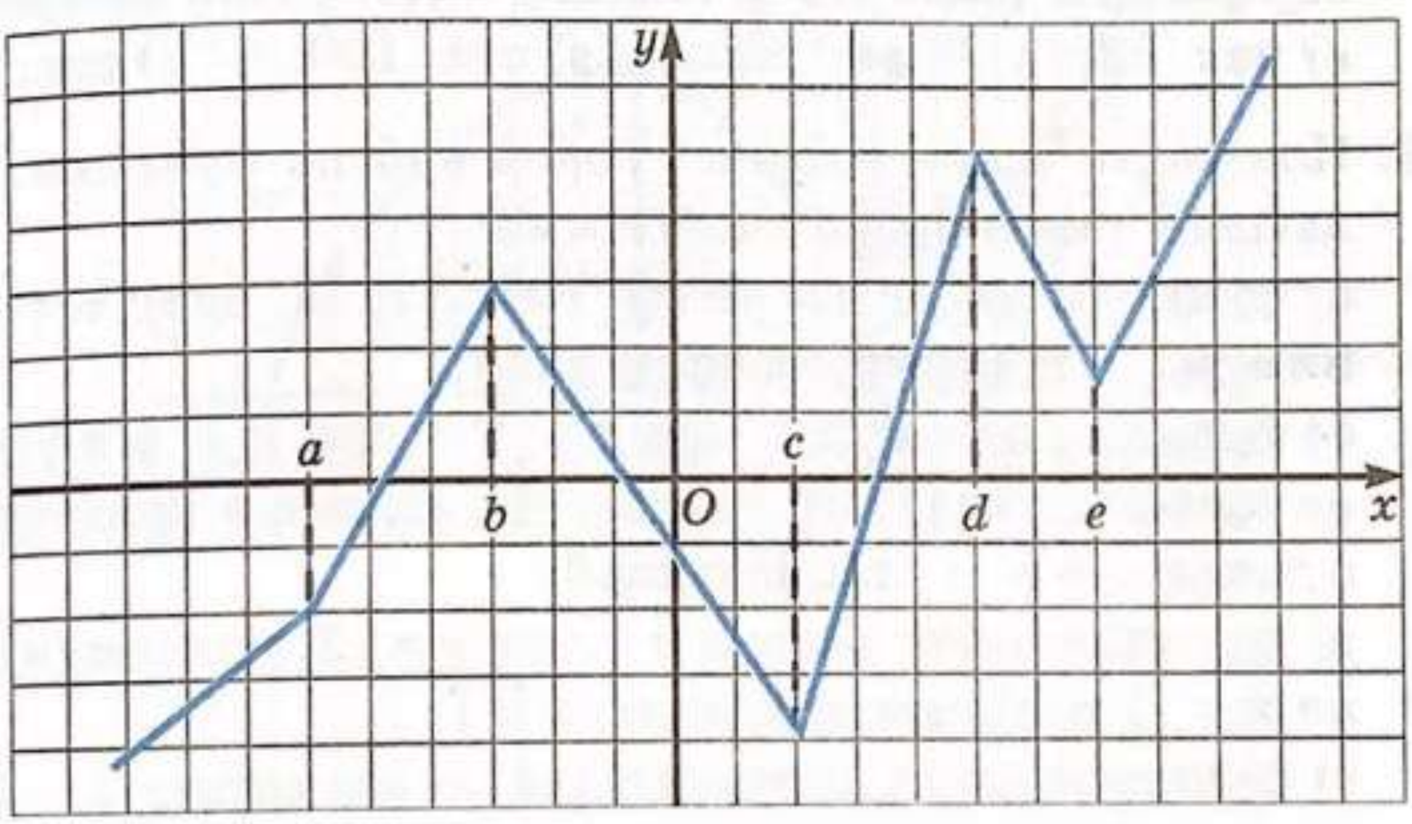


Рис. 120

○**44.37.** По графику функции $y = f(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$, изображённому на заданном рисунке, определите точки, в которых производная не существует:

а) рис. 117; б) рис. 118; в) рис. 119; г) рис. 120.

○**44.38.** При каких значениях параметра a заданная функция имеет одну стационарную точку:

а) $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$; б) $y = x^3 - 3ax^2 + 75x - 10$?

44.39. Сколько точек минимума имеет функция $y = f(x)$, график которой изображён на заданном рисунке:
а) рис. 117; б) рис. 118; в) рис. 119; г) рис. 120?

44.40. Сколько точек максимума имеет функция $y = f(x)$, график которой изображён на заданном рисунке:
а) рис. 117; б) рис. 118; в) рис. 119; г) рис. 120?

44.41. Используя данные о производной $y = f'(x)$, приведённые в таблице,

x	$(-\infty; 5)$	-5	$(-5; -2)$	-2	$(-2; 8)$	8	$(8; +\infty)$
$y = f'(x)$	+	0	–	0	+	0	+

укажите:
а) промежутки возрастания функции $y = f(x)$;
б) промежутки убывания функции $y = f(x)$;
в) точки максимума функции $y = f(x)$;
г) точки минимума функции $y = f(x)$.

44.42. По графику $y = f'(x)$, изображённому на заданном рисунке, определите, имеет ли функция $y = f(x)$ точки экстремума:
а) рис. 98; б) рис. 99; в) рис. 100; г) рис. 101.

○**44.43.** Постройте эскиз графика какой-нибудь функции, обладающей указанными свойствами:
а) функция имеет две точки максимума, одну точку минимума и является ограниченной;
б) функция возрастает при $x \leqslant 1$ и при $x \geqslant 5$ и убывает на промежутке $[1; 5]$, точка $x = 1$ является критической, а точка $x = 5$ — стационарной;
в) функция имеет разрыв в точке $x = -2$, максимум в точке $x = -1$ и минимум в точке $x = 1$;
г) функция имеет горизонтальную асимптоту $y = 3$ при $x \to \infty$, одну точку максимума и одну точку минимума.

○**44.44.** а) Постройте эскиз графика функции, дифференцируемой на интервале (a, b), имеющей на этом интервале одну точку минимума, две точки максимума и не имеющей наименьшего значения.
б) Постройте эскиз графика функции, дифференцируемой на интервале (a, b), имеющей на нём две точки минимума, две точки максимума, но не имеющей ни наименьшего, ни наибольшего значений.

○**44.45.** Может ли иметь только одну точку экстремума:

а) чётная функция;
б) нечётная функция;
в) периодическая функция;
г) монотонная функция?

○**44.46.** По графику функции $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, изображённому на заданном рисунке, постройте эскиз графика её производной:

а) рис. 121; б) рис. 122; в) рис. 123; г) рис. 124.

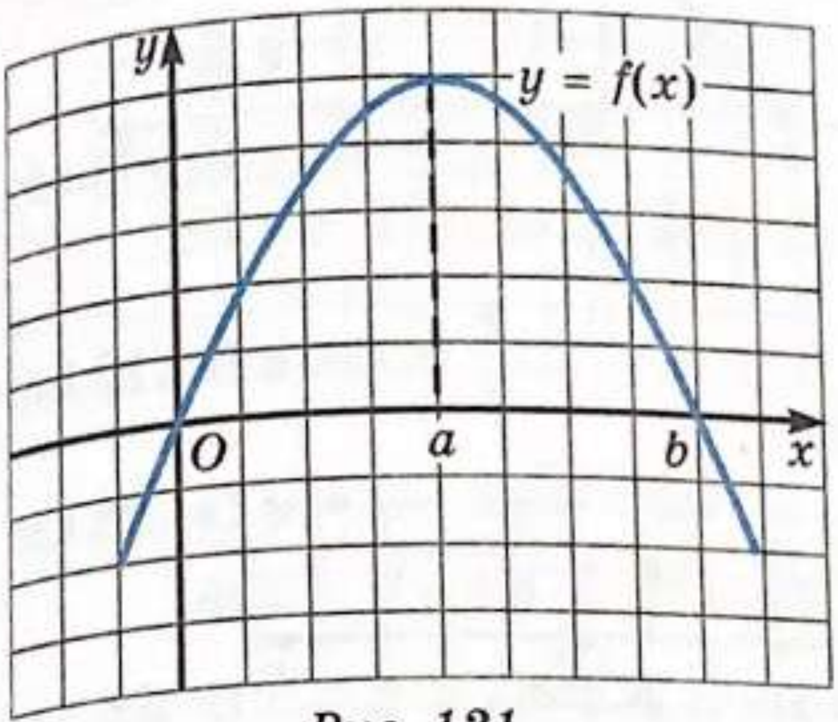


Рис. 121

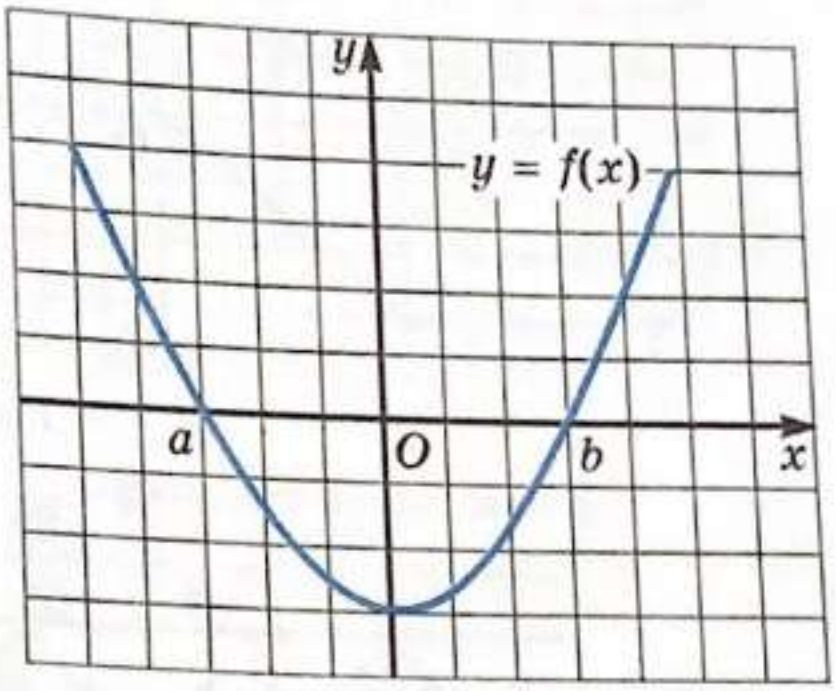


Рис. 122

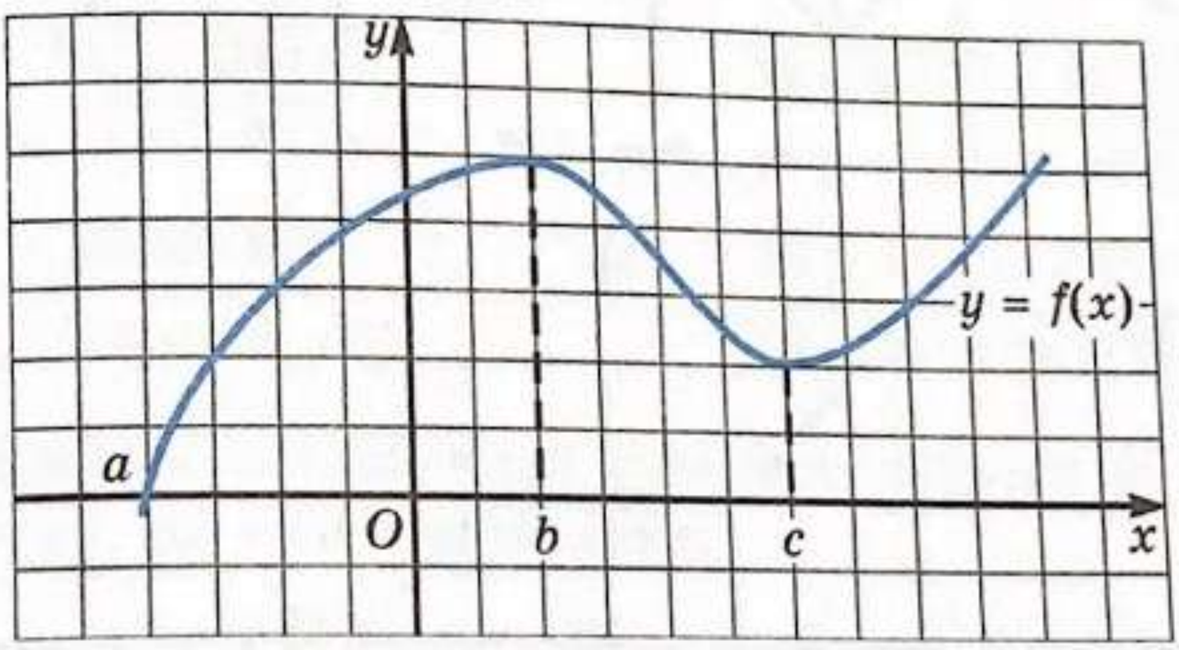


Рис. 123

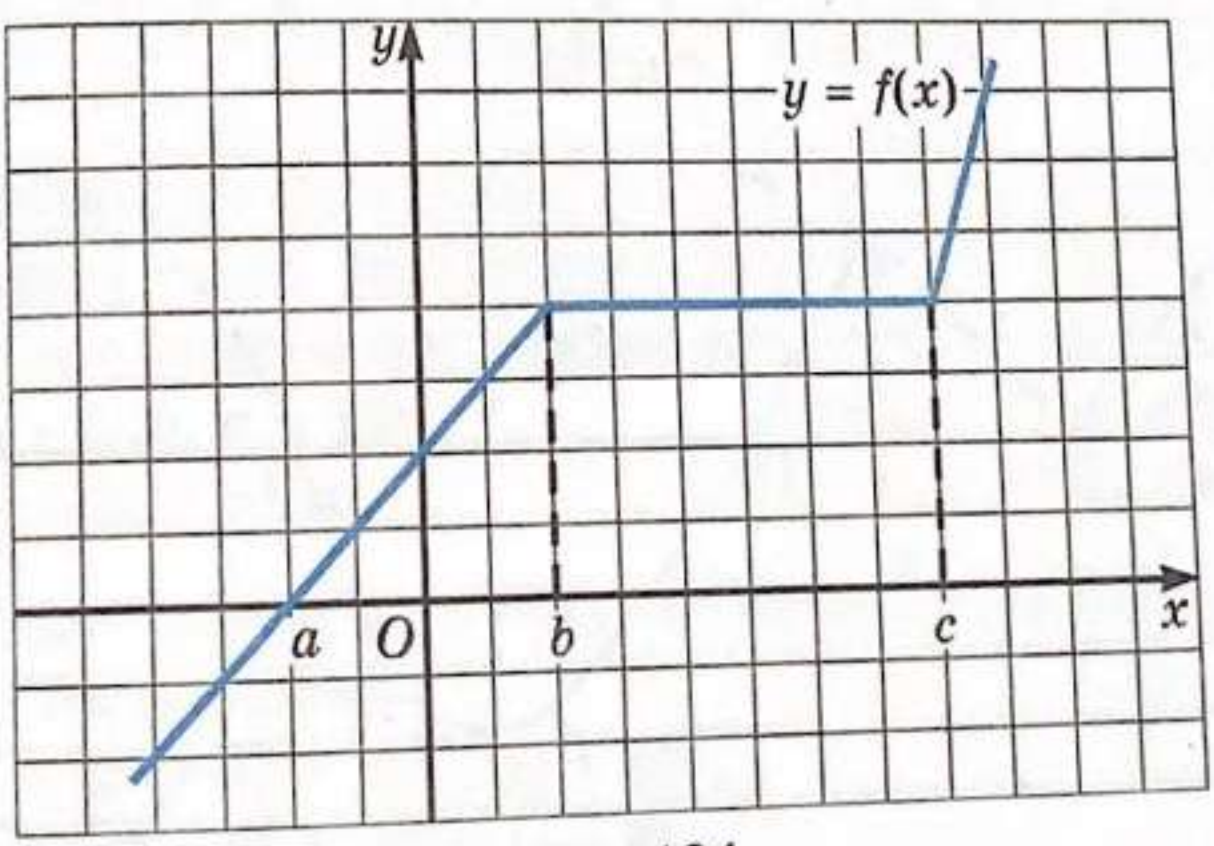


Рис. 124

○**44.47.** Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, $x \in R$, по графику производной, изображённому на заданном рисунке
а) рис. 125; б) рис. 126; в) рис. 127; г) рис. 128.

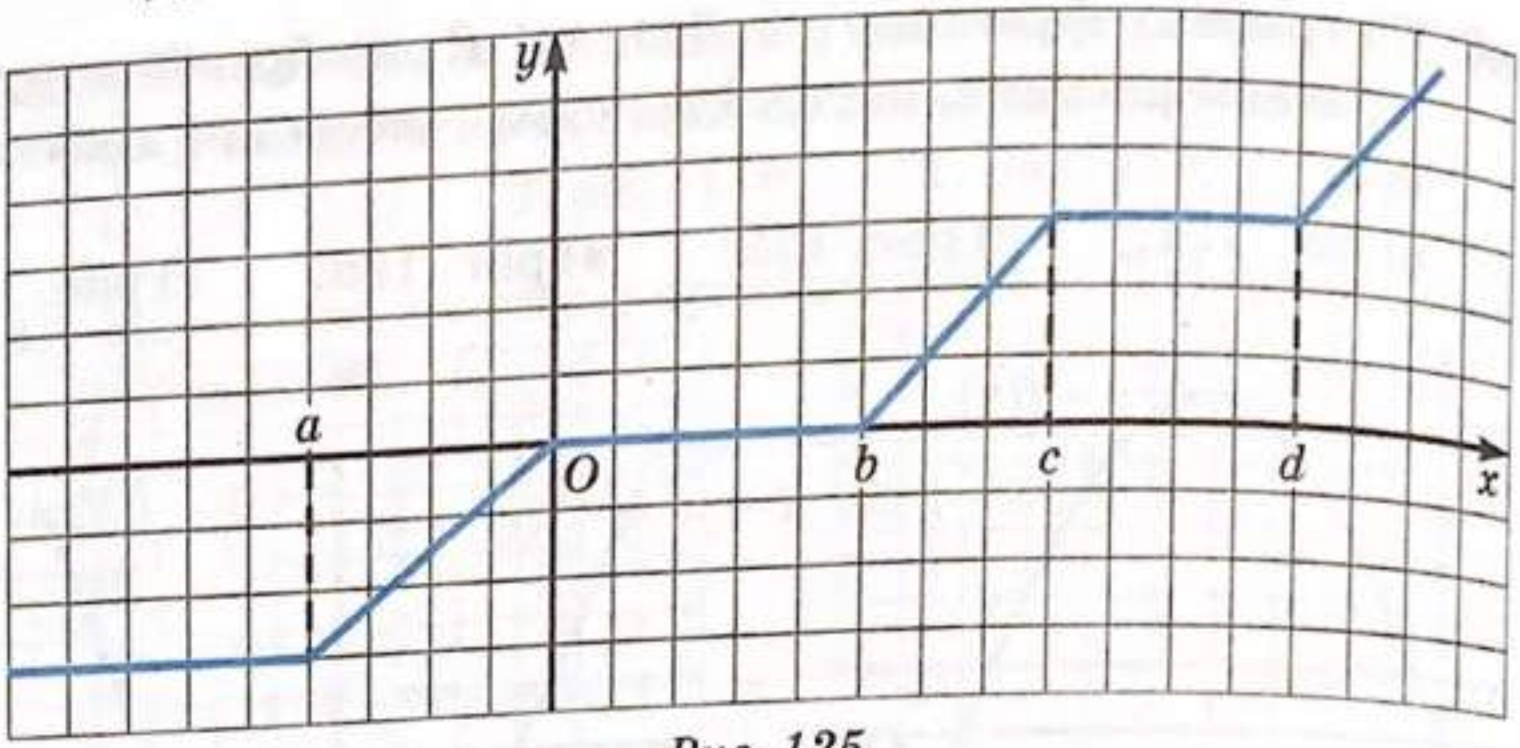


Рис. 125

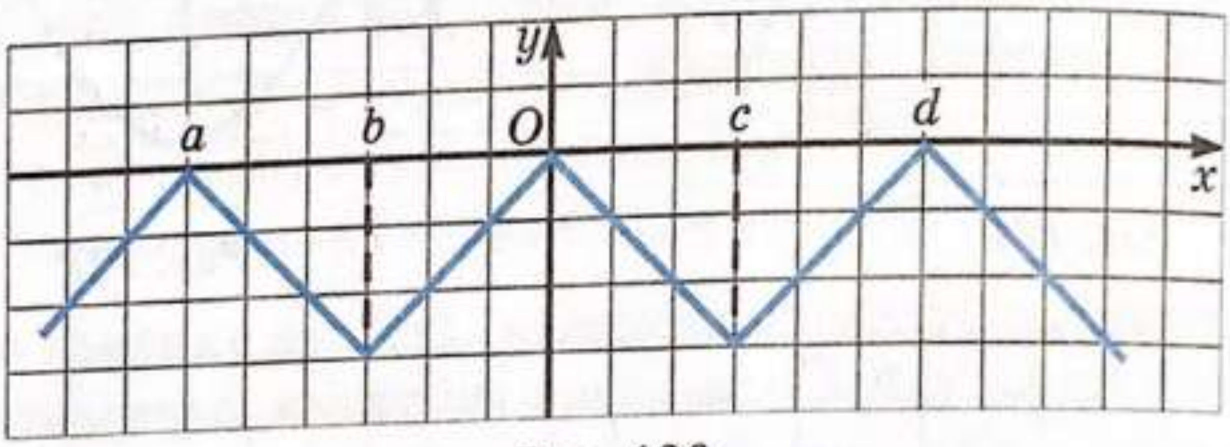


Рис. 126

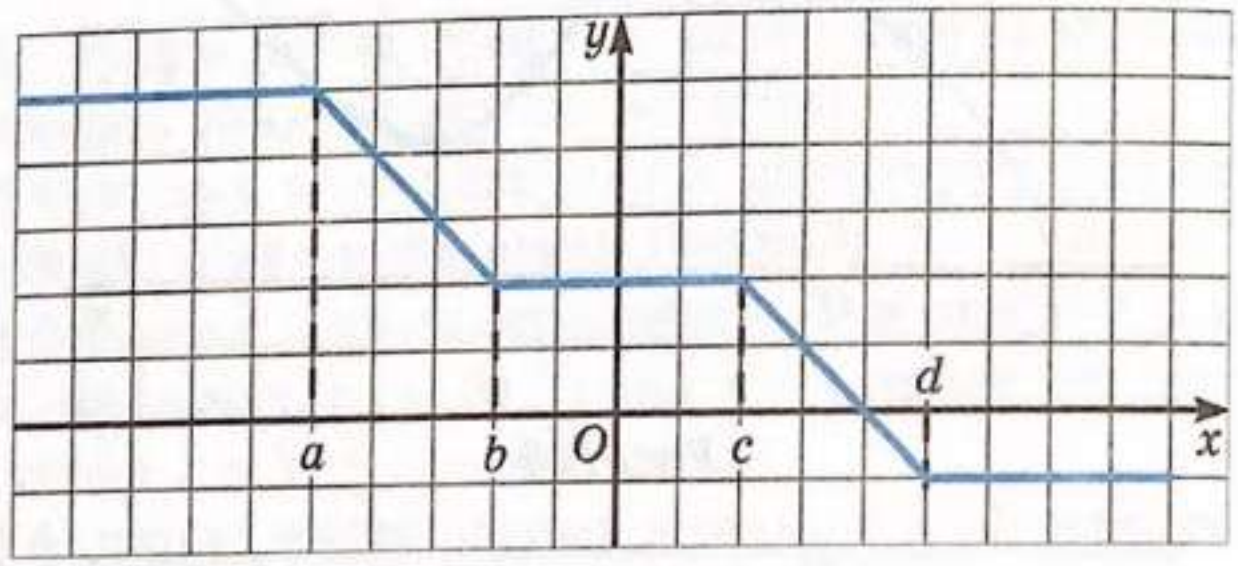


Рис. 127

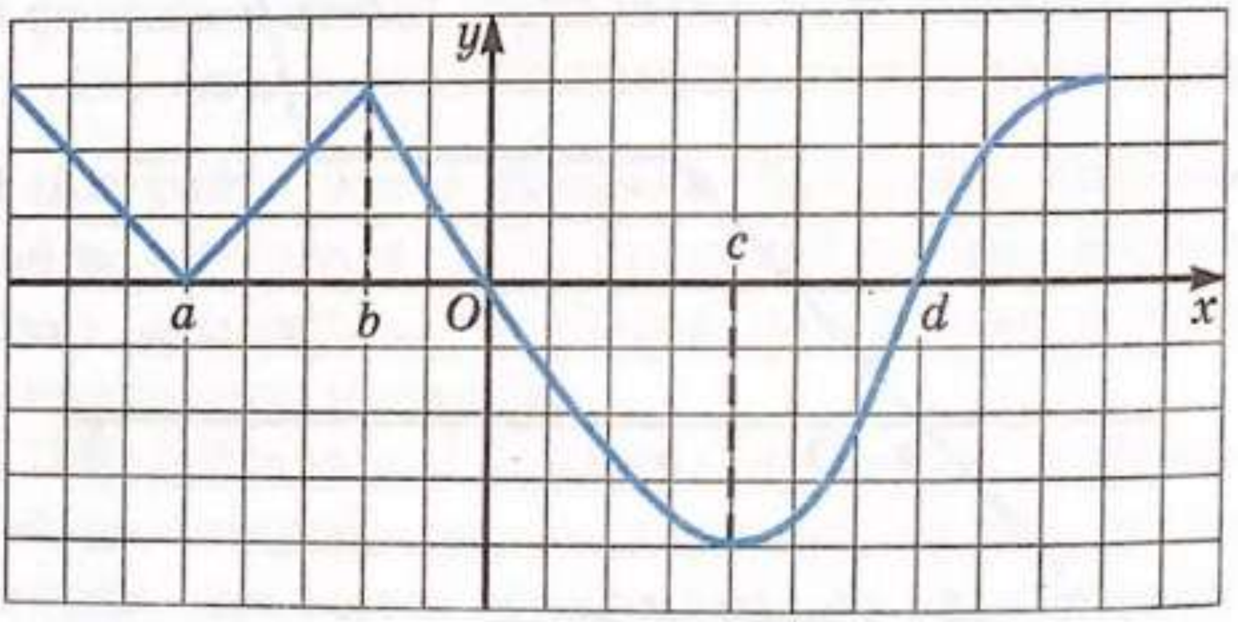


Рис. 128

Прочитайте п. 3 в § 44 учебника.

387

Найдите точки экстремума заданной функции и определите их характер:

○44.48. а) $y = 2x^2 - 7x + 1$; в) $y = 4x^2 - 6x - 7$;
б) $y = 3 - 5x - x^2$; г) $y = -3x^2 - 12x + 50$.

○44.49. а) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$; в) $y = x^3 - 7x^2 - 5x + 11$;
б) $y = x^3 - 27x + 26$; г) $y = 2x^3 - 21x^2 + 19$.

○44.50. а) $y = 5x^5 - 3x^3$; в) $y = x^4 - 50x^2$;
б) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13$; г) $y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$.

○44.51. а) $y = x + \frac{4}{x}$; б) $y = \frac{x^2 + 9}{x}$.

○44.52. а) $y = x - 2\sqrt{x - 2}$; в) $y = 4\sqrt{2x - 1} - x$;
б) $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{5 - x}$; г) $y = \sqrt{x} + 2\sqrt{7 - x}$.

○44.53. а) $y = x - 2\cos x$, $x \in [-\pi; \pi]$;
б) $y = 2\sin x - x$, $x \in [\pi; 3\pi]$.

○44.54. а) $y = (x^3 - 27x)^3$; в) $y = (x^3 - 3x^2)^4$;
б) $y = \sqrt{x^3 - 27x}$; г) $y = \sqrt{x^3 - 3x^2}$.

●44.55. а) $y = \arcsin x^2$; в) $y = \arccos x^2$;
б) $y = 3\,\text{arcctg}\,\sqrt{x}$; г) $y = \text{arctg}\,\sqrt{2x}$.

○44.56. Докажите, что заданная функция не имеет ни точек максимума, ни точек минимума:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - 12$; в) $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x - 7$;

б) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 9$; г) $y = -x^3 - x^5 + 27$.

○44.57. Производная функции $y = ax^2 + 7x + 1$ в точке x_0 равна c. Найдите точку экстремума функции и определите, является она точкой максимума или точкой минимума, если:

а) $x_0 = 0{,}5$, $c = 15$; в) $x_0 = -1$, $c = 9$;
б) $x_0 = 3$, $c = -5$; г) $x_0 = -0{,}5$, $c = 7{,}1$.

●44.58. Найдите точки экстремума заданной функции и определите их характер:

а) $y = |x^4 + 1| + |x^4 - 1| + 2x^3$;
б) $y = |x^3 - 8| + |x^3 - 1| - x^2$.

Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

○**44.59.** а) $y = \sin x - \frac{1}{2}x$;
б) $y = \frac{x}{2} - \cos x$;
в) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \cos x$;
г) $y = x - \sin x$.

○**44.60.** а) $y = x - \sin 2x$;
б) $y = x + 4\cos\frac{x}{2}$.

○**44.61.** а) $y = |x - 3| - 2$;
б) $y = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$;
в) $y = |(x - 2)(x + 3)|$;
г) $y = (|x| - 2)|x|$.

○**44.62.** а) $y = |x^3 - 3x|$;
б) $y = |x - x^3|$.

Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы и постройте её график:

○**44.63.** а) $y = 3x^2 - 4x + 5$;
б) $y = 3 + 2x - x^2$;
в) $y = 7 - x - 2x^2$;
г) $y = 5x^2 - 15x - 4$.

○**44.64.** а) $y = 3x^2 - x^3$;
б) $y = 6x + x^3$;
в) $y = x^3 + 3x^2$;
г) $y = 3x - x^3$.

○**44.65.** а) $y = x^3 - 3x^2 + 2$;
б) $y = -x^3 + 4x - 3$;
в) $y = -x^3 + 4x^2 - 3$;
г) $y = x^3 - 3x + 2$.

○**44.66.** а) $y = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$;
б) $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$;
в) $y = x^3 + x^2 - x - 1$;
г) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + \frac{5}{3}$.

○**44.67.** а) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$;
б) $y = x^5 - 5x$;
в) $y = 2x^4 - 9x^2 + 7$;
г) $y = 5x^3 - 3x^5$.

○**44.68.** а) $y = (x - 1)^2(x + 2)$;
б) $y = \frac{256}{9}x(x - 1)^3$;
в) $y = (x + 2)^2(x - 3)$;
г) $y = x^3(2 - x)$.

Решите уравнение:

○**44.69.** а) $x^3 + 5 = 15 - x$;
б) $x^5 + 3x^3 + 7x - 11 = 0$;
в) $2x^5 + 3x^3 = 17 - 12x$;
г) $x^5 + 4x^3 + 8x - 13 = 0$.

●**44.70.** а) $\sin 5x - 2\cos x - 8x = x^5 - 2$;
б) $4\cos 3x + 5\sin\frac{x}{2} + 15x = 4 - x^3$.

44.71. а) $3\cos \pi x + 5\sin \frac{\pi x}{2} + 18x = 43 - x^5 - 22x^3$;

б) $2\sin \frac{\pi}{2}x - 2\cos \pi x - 10x = x^5 - 54$.

Прочитайте п. 4 в § 44 учебника.

391

Докажите тождество:

44.72. а) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

44.73. а) $\arccos\sqrt{1 - x^2} = \begin{cases} \arcsin x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\arcsin x, & -1 \leqslant x < 0; \end{cases}$

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1 - x}{1 + x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$

44.74. Докажите, что функция $y = f(x)$ постоянна на указанном промежутке, и найдите значение этой постоянной:

а) $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1 + x^2}$ при $x \geqslant 1$;

б) $f(x) = \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} + \operatorname{arctg} x$ при $x < 0$.

Докажите неравенство:

44.75. а) $x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$, если $x > \frac{2}{3}$;

б) $2\sqrt{x} \geqslant 3 - \frac{1}{x}$, если $x > 0$.

44.76. а) $\arcsin x > x$, если $0 < x < 1$;

б) $\operatorname{arctg} x > x - \frac{x^3}{3}$, если $x > 0$.

§ 45 ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

45.1. Исследуйте функцию и постройте её график:

а) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; б) $y = \frac{-2}{x^2 + 4}$.

Исследуйте функцию и постройте её график:

○**45.2.** а) $y = \frac{-1}{x^2 + 4x + 4}$; б) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$.

○**45.3.** а) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$; б) $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.

○**45.4.** а) $y = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$; б) $y = \frac{x - 2}{x^2 + 5}$.

○**45.5.** а) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$; б) $y = \frac{x - 3}{x^2 - 8}$.

○**45.6.** а) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; б) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.

○**45.7.** а) $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$; б) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

●**45.8.** а) $y = 2\sqrt{x} - x$; б) $y = \sqrt{x + 4} + \frac{2}{3}\sqrt{9 - 3x}$.

●**45.9.** а) $y = \sqrt{\frac{x - 1}{x}}$; б) $y = (x - 3)\sqrt{x}$.

●**45.10.** а) $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; б) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

○**45.11.** а) Постройте график функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$.
б) При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 2x^2 + 3 = a$ имеет три корня?

○**45.12.** а) Постройте график функции $y = -x^4 + 2x^2 + 8$.
б) При каких значениях параметра a уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней?

○**45.13.** Сколько корней имеет заданное уравнение при указанных ограничениях на параметр a:
а) $x^3 - 3x^2 = a$, $-4 < a < 0$;
б) $-x^3 + 3x^2 - 2 = a$, $a < -2$;
в) $3x^2 - x^3 = a$, $0 < a < 4$;
г) $x^3 - 3x^2 + 2 = a$, $a > 2$?

●**45.14.** Сколько корней имеет уравнение $x^3 + ax + 2 = 0$ при различных значениях параметра a?

Решите уравнение:

○**45.15.** а) $3\sqrt{x + 1} = -x^3 + 3x^2 + 6$;
б) $x^3 - 3x = (x + 1)^6 + 2$.

●**45.16.** $\sqrt{x}(4x^3 + 3x^2 - 6x + 2{,}75 - \sin \pi x) = 0$.

§ 46 НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Прочитайте п. 1 в § 46 учебника.

398

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном отрезке без помощи производной:

46.1. а) $y = x^8 - 1$, $[-1; 2]$;
б) $y = -x^5 + 2$, $[-2; 1]$;
в) $y = x^3 - 4$, $[0; 3]$;
г) $y = -2x^4 + 8$, $[0; 3]$.

46.2. а) $y = (x - 1)^3 + 4$, $[-2; 1]$;
б) $y = 7 - (2x - 8)^4$, $[-1; 3]$;
в) $y = 5 - (3x + 6)$, $[-2; 0]$;
г) $y = 2(x + 3)^6 - 4$, $[-1; 2]$.

46.3. а) $y = \sin x - 3$, $\left[\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$;

б) $y = \cos x + 0{,}5$, $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$;

в) $y = -2\sin x + 1$, $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5}{6}\pi\right]$;

г) $y = 4 - 3\cos x$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7}{6}\pi\right]$.

46.4. а) $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $y = \sqrt{1 + \sin x}$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$, $[0; \pi]$;

г) $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

46.5. а) $y = \big||x| - 4\big|$, $[-3; 3]$;
б) $y = \big|3 - |x|\big|$, $[-4; 4]$.

46.6. а) $y = 2 - 3\sin x + 4\cos x$;
б) $y = 3\sin x - 4\cos x + 1$.

46.7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \begin{cases} -4x + 12, \text{ если } x < 2, \\ x^2 - 2x + 2, \text{ если } x \geqslant 2 \end{cases}$$

на отрезке:
а) $[-3; 0]$;
б) $[3; 4]$;
в) $[-1; 3]$;
г) $[1; 4]$.

○**46.8.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \begin{cases} (x+2)^2 - 3, \text{ если } x \leqslant -2, \\ x^2 - 4, \text{ если } x > -2 \end{cases}$$

на отрезке:

а) $[-4; -3]$; б) $[0; 2]$; в) $[-2; 3]$; г) $[-3; 0]$.

○**46.9.** Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на указанном отрезке:

а) $y = x^2 - 8x + 19$, $[-1; 5]$;

б) $y = x^2 + 4x - 3$, $[0; 2]$;

в) $y = 2x^2 - 8x + 6$, $[-1; 4]$;

г) $y = -3x^2 + 6x - 10$, $[-2; 9]$.

○**46.10.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ на отрезке:

а) $[-1; 3]$; б) $[3; 6]$; в) $[-2; 3]$; г) $[3; 5]$.

○**46.11.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 45x - 2$ на отрезке:

а) $[-6; 0]$; б) $[1; 2]$; в) $[-6; -1]$; г) $[0; 2]$.

○**46.12.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ на отрезке:

а) $[0; 2]$; б) $[3; 6]$; в) $[-1; 3]$; г) $[2; 7]$.

○**46.13.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1$ на отрезке:

а) $[-1; 2]$; б) $[1; 6]$; в) $[-2; 3]$; г) $[1; 7]$.

○**46.14.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = x + \dfrac{4}{x-1}$ на отрезке:

а) $[2; 4]$; б) $[-2; 0]$.

○**46.15.** Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на указанном отрезке:

а) $y = \operatorname{ctg} x + x$, $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$;

б) $y = 2\sin x - x$, $[0; \pi]$;

в) $y = 2\cos x + x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

г) $y = \operatorname{tg} x - x$, $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на указанном промежутке:

○46.16. а) $y = (2x - 1)^2(x - 2)$, $[-1; 2]$;

б) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x - 1}$, $[0; 2]$;

в) $y = (x + 4)(3x + 1)^2$, $\left[-2; -\dfrac{1}{2}\right]$;

г) $y = \dfrac{5x^3}{x^2 - 9}$, $[-1; 1]$.

○46.17. а) $y = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 21$, $[-3; 0]$;

б) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 9$, $[0; 4]$;

в) $y = 4x^3 - 21x^2 + 36x - 2$, $[1; 2]$;

г) $y = 0{,}25x^4 - 2\dfrac{1}{3}x^3 + 3{,}5$, $[-1; 2]$.

○46.18. а) $y = x^2 - 5|x| + 6$, $[0; 4]$;

б) $y = x^2 - 5|x| + 6$, $[-5; 0]$;

в) $y = x^2 + 8|x| + 7$, $[1; 5]$;

г) $y = x^2 + 8|x| + 7$, $[-8; -2]$.

●46.19. а) $y = x^3 - 2x|x - 2|$, $[-1; 3]$;

б) $y = 3x|x + 1| - x^3$, $[-1; 2]$.

●46.20. а) $y = x^2 - 4x + 5 + |1 - x|$, $[0; 4]$;

б) $y = |x^3 - 1| - 3x$, $[-1; 3]$.

○46.21. а) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

б) $y = \sin^5 x - \cos^5 x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$.

○46.22. а) $y = \sin^2 \dfrac{x}{2} \cdot \sin x$, $[-\pi; 0]$;

б) $y = \cos^2 0{,}5x \cdot \cos x$, $[0; \pi]$.

Прочитайте п. 2 в § 46 учебника. 402

○46.23. Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на указанном промежутке:

а) $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $[0{,}5; +\infty)$;

б) $y = x - 2\sqrt{x}$, $[0; +\infty)$;

в) $y = \dfrac{1}{5}x^5 - x^2$, $(-\infty; 1]$;

г) $y = \dfrac{x^4}{x^4 + 1}$, $(-\infty; +\infty)$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на указанном промежутке:

○46.24. а) $y = x + \frac{1}{x}$, $(-\infty; 0)$;

б) $y = \frac{3x}{x^2 + 3}$, $[0; +\infty)$;

в) $y = -2x - \frac{1}{2x}$, $(0; +\infty)$;

г) $y = \sqrt{2x + 6} - x$, $[-3; +\infty)$.

○46.25. а) $y = x^3 - 3x$, $(-\infty; 0]$;

б) $y = \frac{x}{x^4 + 3}$, $[0; +\infty)$;

в) $y = x^3 - 3x$, $[0; +\infty)$;

г) $y = \frac{x}{x^4 + 3}$, $(-\infty; 0]$.

○46.26. Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции:

а) $y = x^4 - 2x^2 - 6$ на отрезке $[-2; 2]$;

б) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[-1; 2]$.

Найдите те значения аргумента, при которых заданная функция достигает наибольшего значения:

○46.27. а) $y = \sqrt{(x - 1)(10 - x)}$;

б) $y = \sqrt{(x + 2)(4 - x)}$;

в) $y = \sqrt{(2x - 6)(7 - x)}$;

г) $y = \sqrt{(5 - x)(x - 3)}$.

○46.28. а) $y = \sqrt{x - 5} + \sqrt{9 - x}$;

б) $y = 3\sqrt{x + 1} + \sqrt{-x}$;

в) $y = \sqrt{10 - 2x} + \sqrt{3x}$;

г) $y = \sqrt{8 - 3x} + \sqrt{x}$.

○46.29. Найдите те значения аргумента, при которых заданная функция достигает наименьшего значения:

а) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$;

б) $y = \sqrt{7(x + 9)(x - 6)}$;

в) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 10}$;

г) $y = \sqrt{2(x - 4)(x + 8)}$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

○46.30. а) $y = \sqrt{(x - 5)(15 - x)}$;

б) $y = \sqrt{(2x + 4)(3 - x)}$;

в) $y = \sqrt{(12 - x)(x - 4)}$;

г) $y = \sqrt{(5 - x)(3x + 6)}$.

○46.31. а) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$;

б) $y = \sqrt{3x^2 + 6x + 4}$;

в) $y = \sqrt{x^2 + 6x - 7}$;

г) $y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$.

○46.32. а) $y = -x^8 + 2x^4 + 1$; б) $y = -x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}$.

○46.33. а) $y = \sqrt{5 - x^2} + \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{5 - x^2}$.

○46.34. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = 2|x| - 4$;

б) $y = x^2 - 5|x| + 6$;

в) $y = 3|x| + 9$;

г) $y = x^2 - 6|x| - 7$.

Найдите область значений функции:

○46.35. а) $y = 2x - \sqrt{16x - 4}$, $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{17}{4}\right]$;

б) $y = 2\sqrt{x - 1} - 0{,}5x$, $x \in [1; 10]$.

●46.36. а) $y = x\sqrt{x + 2}$; б) $y = x\sqrt{1 - 2x}$.

●46.37. $y = \dfrac{-2x^2 - 2x - 38}{x^2 + 6x + 34}$.

●46.38. а) При каком значении параметра a наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x + a}$ равно $-6\sqrt{3}$?

б) При каком значении параметра a наибольшее значение функции $y = (a - x)\sqrt{x}$ равно $10\sqrt{5}$?

●46.39. а) При каком значении параметра n сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2nx + 4n^2 + 3n = 0$ будет наибольшей?

б) При каком значении параметра n сумма квадратов корней уравнения $x^2 + nx + 2n - 1 = 0$ будет наименьшей?

Разберите решение примера 4 в § 46 учебника. 403

●46.40. Докажите, что при любых значениях x выполняется неравенство: $x^7 + (1 - x)^7 > \frac{\sqrt{2}}{100}$.

Прочитайте п. 3 в § 46 учебника. 403

●46.41. Сколько натуральных чисел принадлежит области значений функции $y = \sqrt{(x^3 - x^2)^3} + \sqrt{9 - 6x + x^2}$, $x \in [3; 5]$?

●46.42. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \left|\sqrt{2 - x^2} - 2\right| + \sqrt{2 - x^2} - 2 + 2x - x^2$.

46.43. Найдите область значений функции
$$y = \left|\sqrt{8 + 2x - x^2} - 4\right| + \sqrt{8 + 2x - x^2} + x^3 - 3x^2 - 9x.$$

46.44. а) Сумма двух целых чисел равна 24. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наибольшее значение.

б) Произведение двух положительных чисел равно 484. Найдите эти числа, если известно, что их сумма принимает наименьшее значение.

46.45. а) Разность двух чисел равна 10. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

б) Разность двух чисел равна 98. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

46.46. а) Известно, что одно из двух чисел на 36 больше другого. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

б) Известно, что одно из двух чисел меньше другого на 28. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

46.47. а) Представьте число 3 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма утроенного первого слагаемого и куба второго слагаемого была наименьшей.

б) Представьте число 5 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение первого слагаемого и куба второго слагаемого было наибольшим.

46.48. а) Периметр прямоугольника составляет 56 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

б) Периметр прямоугольника составляет 72 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

46.49. а) Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 200 м. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

б) Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 240 м. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

○46.50. а) Площадь прямоугольника составляет 16 см^2. Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

б) Площадь прямоугольника составляет 64 см^2. Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

○46.51. Огораживают спортивную площадку прямоугольной формы площадью 2500 м^2. Каковы должны быть её размеры, чтобы на забор ушло наименьшее количество сетки-рабицы?

○46.52. Сторона квадрата $ABCD$ равна 8 см. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки P и E так, что $BP = BE = 3$ см. На сторонах AD и CD берутся точки соответственно K и M так, что четырёхугольник $KPEM$ — трапеция. Чему равна наибольшая площадь такой трапеции?

○46.53. а) В арифметической прогрессии с разностью d девятый член равен 1. При каком значении d произведение четвёртого, седьмого и восьмого членов прогрессии будет наибольшим?

б) В арифметической прогрессии с разностью d второй член равен 6. При каком значении d произведение первого, третьего и шестого членов будет наименьшим?

○46.54. а) Найдите длину отрезка наибольшей длины, который заключён между графиками функций $y = 2x^2$ (снизу), $y = 4x$ (сверху) и параллелен оси y.

б) Найдите длину отрезка наибольшей длины, который заключён между графиками функций $y = x^2$ (снизу), $y = -2x$ (сверху) и параллелен оси y.

○46.55. а) На графике функции $y = x^2$ найдите точку M, ближайшую к точке $A(0; 1{,}5)$.

б) На графике функции $y = \sqrt{x}$ найдите точку M, ближайшую к точке $A(4{,}5; 0)$.

●46.56. Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны 15 см. При какой длине второго основания площадь трапеции будет наибольшей?

●46.57. Из прямоугольной трапеции с основанием a и b и высотой h вырезают прямоугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь, если:

а) $a = 80$, $b = 60$, $h = 100$; б) $a = 24$, $b = 8$, $h = 12$?

●46.58. У пятиугольника $ABCDE$ углы A, B и E — прямые, $AB = a$, $BC = b$, $AE = c$, $DE = m$. Впишите в пятиугольник прямоугольник наибольшей площади, если:
а) $a = 7$, $b = 9$, $c = 3$, $m = 5$;
б) $a = 7$, $b = 18$, $c = 3$, $m = 1$.

●46.59. Памятник состоит из статуи и постамента. К памятнику подошёл человек. Верхняя точка памятника находится выше уровня глаз человека на a м, а верхняя точка постамента — на b м. На каком расстоянии от памятника должен стать человек, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

●46.60. База находится в лесу в 5 км от дороги, а в 13 км от базы на этой дороге есть железнодорожная станция. Пешеход по дороге идёт со скоростью 5 км/ч, а по лесу — 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход может добраться от базы до станции?

○46.61. Открытый металлический бак с квадратным основанием должен вмещать 32 л воды. При каких размерах на его изготовление уйдёт наименьшее количество материала?

○46.62. Закрытый металлический бак с квадратным дном должен иметь объём 343 м^3. При каких размерах на его изготовление пойдёт наименьшее количество материала?

○46.63. Для перевозки груза требуется изготовить закрытый короб в форме прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого относились бы как $2:3$, а объём составлял 576 м^3. Каковы должны быть размеры всех его сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

○46.64. Диагональ боковой грани правильной четырёхугольной призмы равна d. При какой длине бокового ребра объём призмы будет наибольшим?

○46.65. Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна p. При какой высоте пирамиды её объём будет наибольшим?

○46.66. Периметр осевого сечения цилиндра равен p см. Какова должна быть высота цилиндра, чтобы его объём был наибольшим?

○46.67. Объём цилиндра равен V м^3. Каким должен быть его радиус, чтобы полная поверхность цилиндра была наименьшей?

8 КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ

ГЛАВА

§ 47 ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ. ПЕРЕСТАНОВКИ И ФАКТОРИАЛЫ

Прочитайте п. 1 и разберите решение примеров 1—3 в § 47 учебника. 414

○47.1. Двузначное число составляют из цифр 0, 1, 3, 4, 5, 6, 9 (повторения цифр допустимы).

а) Сколько всего можно составить чисел?

б) Сколько всего можно составить чисел, больших 50?

в) Сколько всего можно составить нечётных чисел?

г) Сколько всего можно составить нечётных чисел, меньших 55?

○47.2. Двузначное число составляют из цифр 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7 (повторения цифр допустимы).

а) Сколько всего можно составить чисел?

б) Сколько всего можно составить чисел, отличающихся от 40 менее чем на 10?

в) Сколько всего можно составить чётных чисел?

г) Сколько можно составить чисел, отличающихся от 50 более чем на 20?

●47.3. а) Сколько имеется трёхзначных чисел, составленных только из чётных цифр?

б) Сколько имеется трёхзначных чисел, которые не меняются при перемене местами первой и последней цифр?

в) Сколько имеется трёхзначных чисел, кратных 5?

г) Сколько имеется трёхзначных чисел, которые при перемене местами первой и второй цифр меняются менее чем на 90?

○47.4. На кусок белого, чёрного или ржаного хлеба можно положить сыр, колбасу или масло. Бутерброд можно запить чаем, кофе, молоком или кефиром, а после этого или погулять, или пойти в гости, или остаться дома.

а) Найдите общее число вариантов начала выходного дня.

б) В скольких случаях будет выпит молочный напиток?

в) Каков будет ответ в пункте а), если в доме привыкли масло мазать только на белый хлеб?

г) Каков будет ответ в пункте а), если хлеб надо сначала купить в одном из трёх ближайших магазинов?

47.5. За четверть в классе прошли пять тем по алгебре. Контрольная работа будет состоять из пяти задач: по одной задаче из каждой темы. К каждой теме заранее был составлен список из 10 задач, одна из которых будет входить в вариант контрольной. Ученик умеет решать только по 8 задач в каждой теме. Найдите:

а) общее число всех вариантов контрольной работы;

б) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все пять задач;

в) число тех вариантов, в которых ученик ничего не может решить;

г) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все задачи, кроме первой.

47.6. В каждую клетку квадратной таблицы 3×3 произвольно ставят крестик или нолик.

а) Сколькими способами можно заполнить эту таблицу?

б) В скольких случаях в первом столбце будут одни крестики?

в) В скольких случаях по диагоналям будут стоять одни нолики?

г) В скольких случаях во второй строке будет стоять ровно один крестик?

47.7. В один день происходят выборы мэра города и префекта округа. На первую должность свои кандидатуры выставили Алкин, Балкин, Валкин, а на вторую — Эшкин, Юшкин, Яшкин.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов голосования на выборах.

б) В скольких вариантах будет кандидатура Эшкина?

в) В скольких вариантах фамилии кандидатов состоят из разного числа букв?

г) Как изменятся ответы в пунктах а) и б), если учесть ещё кандидата «против всех»?

47.8. Ученик помнит, что в формуле азотной кислоты подряд идут буквы H, N, O и что есть один нижний индекс — то ли двойка, то ли тройка.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов, из которых ученику придётся выбирать ответ.

б) Сколько среди них тех, в которых индекс стоит не на втором месте?

в) Как изменится дерево вариантов, если ученик помнит, что на первом месте точно стоит H, а порядок остальных букв забыл?

г) Как изменится дерево вариантов, если буквы могут идти в любом порядке?

о**47.9.** В урне лежат три неразличимых на ощупь шара, два белых и один чёрный. При вытаскивании чёрного шара его возвращают обратно, а вытащенный белый шар откладывают в сторону. Такую операцию производят два раза подряд.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов.

б) В скольких случаях оба вытащенных шара будут чёрными?

в) В скольких случаях вытащенные шары будут разного цвета?

г) Нарисуйте дерево возможных вариантов для трёх вытаскиваний из двух чёрных и двух белых шаров.

о**47.10.** Из пяти одноклассниц A, $Б$, $В$, $Г$, $Д$ только $В$ и $Д$ дружат со всеми, $Б$ дружит, кроме $В$ и $Д$, только с $Г$, остальные не дружат между собой. Для проведения соревнования надо из этих одноклассниц выбрать капитана и его заместителя, которые дружат между собой.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов выбора.

б) В скольких вариантах капитаном будет A?

в) В скольких вариантах выбора будет присутствовать $В$?

г) В скольких вариантах выбора $Г$ будет заместителем?

Прочитайте п. 2 и разберите решение примеров 4—5 в § 47 учебника. 416

Вычислите:

о**47.11.** а) $\dfrac{7! + 8!}{5! + 6!}$; в) $\dfrac{17 \cdot 6! + 8!}{7! + 9!}$;

б) $\dfrac{7}{11} \cdot \dfrac{(10!)^2 - (9!)^2}{(8!)^2 - (7!)^2}$; г) $\dfrac{(7!)^2 \cdot (6!)^2}{4! \cdot 5! \cdot 8! \cdot 9!}$.

о**47.12.** а) $\dfrac{1}{4!} + \dfrac{10}{5!} + \dfrac{630}{6!}$; б) $\dfrac{1}{6!} + \dfrac{1}{5!} - \dfrac{49}{7!}$.

○47.13. Сколькими нулями оканчивается число:
а) 10!; б) 15!; в) 26!; г) 100!?

○47.14. Укажите наибольшее натуральное число n, для которого:
а) 10! кратно 2^n; в) 26! кратно 5^n;
б) 16! кратно 2^n; г) 28! кратно 3^n.

○47.15. Докажите тождество:
а) $(n+1)! - n! = n \cdot n!$;
б) $(2n+1)! - (2n-1)! \cdot 2n = 4n^2 \cdot (2n-1)!$.

○47.16. Решите уравнение:
а) $n! = 42(n-2)!$; в) $0{,}125n! = (n-1)! - 90$;
б) $(k+17)! = 420(k+15)!$; г) $(3x)! = 504(3x-3)!$.

○47.17. При каких натуральных значениях n выполняется неравенство:
а) $n! > (n+1)(n-2)!$;
б) $7 \cdot (2n+1)! \cdot (2n-1)! < 8 \cdot ((2n)!)^2$?

Докажите неравенство:

●47.18. а) $n! > (n+3)^2$ при $n \geqslant 5$; в) $n! > 2^n$ при $n \geqslant 4$;
б) $n! > (n+2)^3$ при $n \geqslant 6$; г) $n! > 4^n$ при $n \geqslant 9$.

●47.19. а) $2{,}66 < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ при всех $n \geqslant 3$;

б) $\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 0{,}125$ при всех $n \geqslant 4$;

в) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 3$ при всех n (используйте пункт б) и номер 47.18 в));

г) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2{,}75$ при всех n.

419 **Прочитайте п. 2 и разберите решение примеров 6—7 в § 47 учебника.**

○47.20. У мамы и папы — один сын. К ним в гости пришла другая семья — мама, папа и дочь. За круглым обеденным столом есть 6 мест. Сколькими способами можно рассадить людей за столом, если:
а) место хозяина дома неприкосновенно;
б) первыми садятся дети, и они садятся рядом;
в) первыми садятся дети, но не рядом друг с другом;
г) жёны садятся рядом со своими мужьями?

○47.21. а) Шесть пловцов участвуют в двух заплывах на шести дорожках. Дорожки между пловцами в каждом заплыве разыгрываются по жребию. Найдите число всех возможных распределений пловцов по дорожкам.

б) То же, но если в каждом заплыве один из пловцов — победитель отборочных соревнований — плывёт по четвёртой дорожке.

в) То же, но если во втором заплыве участвуют 5 пловцов.

г) То же, но если в обоих заплывах участвует по 4 пловца.

○47.22. Две команды по 5 шахматистов проводят матч из пяти одновременно проходящих партий, в каждой из которых встречаются по одному из шахматистов каждой команды.

а) Найдите число всех возможных распределений встреч в матче.

б) То же, но для двух, независимо проводимых матчей.

в) То же, но если во втором матче участвует только по три лучших шахматиста из каждой команды.

г) То же, что и в пункте б), но если во втором матче капитаны команд обязательно играют между собой.

○47.23. Одинаковый текст приглашения напечатан на семи разных открытках. Их надо разослать директорам школ № 1, 2, ..., 7.

а) Найдите число всех возможных рассылок приглашений.

б) То же, что и в пункте а), но если самую красивую открытку послать директору школы № 1.

в) То же, что и в пункте а), но в школы № 3, 6 и 7 надо дополнительно разослать три разные открытки с приглашениями для заместителей директоров по учебной работе.

г) То же, что и в пункте в), но в оставшиеся школы надо дополнительно разослать разные открытки с приглашениями для заместителей директоров по воспитательной работе.

○47.24. В зоопарке надо распределить по одному пять львов по пяти клеткам, четырёх тигров — по четырём другим клеткам и трёх слонов — по трём вольерам.

а) Найдите число всех возможных распределений львов, тигров и слонов в зоопарке.

б) То же, но если есть четыре льва и львица и одного льва (известно какого именно) вместе с львицей надо посадить в одну клетку.

§ 48 ВЫБОР НЕСКОЛЬКИХ ЭЛЕМЕНТОВ. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

421 **Прочитайте п. 1 и разберите решение примеров 1—3 в § 48 учебника.**

○**48.1.** Встретились несколько человек и стали здороваться, обмениваясь рукопожатиями. Рукопожатий было от 60 до 70. Сколько человек встретилось, если известно, что:

а) каждый здоровался с каждым;

б) только один человек не здоровался ни с кем;

в) только двое не поздоровались между собой;

г) четверо поздоровались только между собой и остальные поздоровались только между собой.

○**48.2.** Каждую из n точек, являющихся вершинами выпуклого n-угольника, соединили отрезками с каждой другой вершиной.

а) Сколько провели отрезков?

б) Сколько провели диагоналей?

в) Сколько есть двузвенных ломаных, соединяющих вершину A с вершиной B?

г) Сколько есть трёхзвенных ломаных, соединяющих вершину A с вершиной B (самопересекающиеся ломаные допускаются)?

○**48.3.** В футбольной команде — 11 человек: вратарь, 4 защитника, 4 полузащитника и 2 нападающих. Команда выбирает капитана и его заместителя.

а) Найдите число всех возможных вариантов выбора.

б) Найдите число всех возможных вариантов, если в команде 3 новичка и они не могут быть капитаном или заместителем.

в) Найдите число всех возможных вариантов, если капитан — точно не нападающий, а его заместитель — точно не вратарь.

г) Найдите в пунктах а) и б) число всех возможных вариантов выбора пары кандидатов, из которых тренеры позже будут делать окончательный выбор.

●**48.4.** Все станции пригородной железной дороги разделены на 10 зон, в каждой зоне более одной станции. В билете на проезд в одну сторону указывают номер зоны отправления и номер зоны прибытия.

а) Сколько существует различных типов билетов?
б) Сколько существует различных стоимостей билетов, если стоимость проезда из зоны x в зону y рассчитывается по формуле $S = 7 + 6|x - y|$?
в) Сколько различных типов билетов можно купить не более чем за 50 р.?
г) Сколько существует различных типов билетов по цене, кратной 5 р.?

Прочитайте п. 2 и разберите решение примеров 4—6 в § 48 учебника. 425

Вычислите:

48.5. а) C_{17}^2; б) C_{100}^2; в) C_5^3; г) C_8^4.

48.6. а) A_{10}^3; б) A_8^5; в) A_{20}^2; г) A_{100}^1.

48.7. а) $C_{27}^2 - C_{26}^2$; б) $\dfrac{A_8^6}{A_{10}^2}$; в) $C_{11}^5 + C_{11}^6$; г) $\dfrac{A_{10}^3}{C_{10}^3}$.

○**48.8.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{P_n \cdot C_{n+1}^3}{A_n^{n-2}}$; б) $\dfrac{P_{n+1} \cdot C_n^{n-2}}{A_{n+1}^n}$.

○**48.9.** Составив частное двух чисел, выясните, какое из них больше:

а) C_{17}^3 или C_{18}^4; в) C_{19}^5 или C_{18}^6;
б) C_{18}^4 или C_{19}^5; г) C_n^7 или C_{n+1}^8.

Решите уравнение:

○**48.10.** а) $C_x^3 = 2C_x^2$; в) $C_x^2 + C_{x+1}^2 = 49$;
б) $C_x^{x-2} = 15$; г) $C_8^x = 70$.

○**48.11.** а) $A_x^5 = 18A_{x-2}^4$; б) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$.

○**48.12.** а) $C_x^3 = A_x^2$; в) $C_x^4 = A_x^3 + C_x^3$;
б) $C_x^4 = A_x^3$; г) $0{,}5A_x^4 = 3(A_{x-1}^3 + C_{x-1}^3)$.

○**48.13.** Решите неравенство:

а) $120 < A_{k-3}^2 < 140$; в) $C_{10}^2 < A_x^2 < 60$;
б) $C_6^2 < A_n^2 < C_8^2$; г) $C_{19}^2 < A_x^2 + C_x^2 < 200$.

48.14. Три ноты из семи нот (до, ре, ми, фа, соль, ля, си) одной октавы можно нажать либо одновременно (аккорд), либо поочерёдно (трезвучие).

а) Найдите число всех возможных трезвучий.

б) Найдите число всех возможных аккордов.

в) Найдите число всех возможных аккордов, содержащих ноту «соль».

г) Найдите число всех возможных трезвучий, в которых подряд не идут две соседние ноты (до и си — не соседние ноты).

48.15. «Проказница Мартышка, Осёл, Козёл и косолапый Мишка затеяли сыграть квартет». Сколькими способами они могут:

а) выбрать каждый для себя по одному инструменту из 15 данных;

б) выбрать набор из пяти инструментов из имеющихся 12 инструментов;

в) сесть по одному за какие-то четыре из выбранных в пункте б) инструмента;

г) выгнать одного из участников квартета и потом сесть за какие-то три выбранных в пункте б) инструмента?

48.16. Из колоды в 36 карт выбирают одновременно 5 карт. Найдите:

а) число всех возможных вариантов выбранных карт;

б) число вариантов, при которых среди полученных карт есть четыре туза;

в) число вариантов, при которых все полученные карты — пики;

г) число вариантов, при которых все полученные карты — одной масти.

48.17. По программе в концерте должен выступить хор из пяти певцов и трёх певиц. Предварительное согласие на выступление дали 10 певцов и 8 певиц.

а) Сколько существует различных вариантов состава хора?

б) То же, но если известно, что певцы A и $Б$ ни за что не будут петь вместе.

в) То же, но если известно, что певец A будет петь тогда и только тогда, когда будет петь певица B.

г) То же, если 6 певцов накануне сорвали голос на футболе и вместо недостающего певца придётся выступать одной певице.

●48.18. Пусть $y(n) = \frac{C_n^3}{A_{n-1}^3}$, $n \geqslant 4$.

а) Укажите дробно-линейную функцию, на графике которой лежат все точки $(n; y(n))$.

б) Постройте график этой функции.

в) Укажите наибольшее n, при котором $y(n) > 0{,}25$.

г) Укажите наименьшее n, при котором $y(n)$ отличается от $\frac{1}{6}$ менее чем на 0,01.

●48.19. Пусть $y(n) = \frac{A_n^5}{C_{n-2}^3}$, $n \geqslant 4$.

а) Укажите многочлен, на графике которого лежат все точки $(n; y(n))$.

б) Постройте график этого многочлена.

в) Укажите наибольшее n, при котором $y(n) < 600$.

г) Укажите наименьшее n, при котором $y(n) > 6000$.

○48.20. а) Докажите, что последовательность $\frac{A_{n+1}^4}{C_{n+2}^4}$, $n = 3, 4, 5, \ldots$, монотонно возрастает.

б) Докажите, что все члены этой последовательности больше числа 4.

в) Укажите наименьший номер, начиная с которого члены этой последовательности будут больше 20.

г) Найдите предел этой последовательности при $n \to \infty$.

○48.21. Найдите n, при котором:

а) число C_{n+1}^2 составляет 80 % от числа C_n^3;

б) число C_{n+1}^3 составляет 120 % от числа C_n^4;

в) число C_{2n}^{n+1} составляет 56 % от числа C_{2n+1}^{n-1};

г) число C_{2n+3}^n составляет 150 % от числа C_{2n+2}^{n+2}.

Прочитайте п. 3 и разберите решение примеров 7—9 в § 48 учебника. 429

●48.22. Докажите тождество:

а) $C_n^3 = C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3$;

б) $C_n^{n-4} = C_{n-1}^3 + C_{n-1}^{n-4}$;

в) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$;

г) $C_n^k = C_{n-1}^{n-k} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{n-k-2}$.

●48.23. Выпишите треугольник Паскаля до седьмой строки включительно.

а) Найдите сумму всех чисел в третьей строке треугольника Паскаля.

б) Найдите сумму всех чисел в четвёртой строке треугольника Паскаля.

в) Найдите сумму всех чисел в седьмой строке треугольника Паскаля.

г) Методом математической индукции докажите, что сумма чисел в n-й строке треугольника Паскаля равна 2^n.

48.24. Раскройте скобки в выражении:

а) $(x + 1)^7$; б) $(2x - y)^6$; в) $(x^2 + 2)^5$; г) $(1 - x^3)^4$.

○**48.25.** У многочлена P найдите коэффициент при x^3:

а) $P(x) = (1 + 3x)^4$; в) $P(x) = (x + 2)^5 - (2x + 1)^4$;

б) $P(x) = (3 - 2x)^5$; г) $P(x) = (x^2 - x)^4 + \left(3 - \dfrac{x}{3}\right)^4$.

○**48.26.** В разложении $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{10}$ по степеням x укажите:

а) член, содержащий x^8; в) член, содержащий x^{-2};

б) член, содержащий x^4; г) член, не содержащий x.

●**48.27.** Найдите член разложения, не содержащий переменных:

а) $\left(2x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^6$; в) $\left(3\sqrt[4]{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^9$;

б) $\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{4}{3}}\right)^5$; г) $\left(x^{0,75} + x^{-\frac{2}{3}}\right)^{17}$.

○**48.28.** Известно, что сумма биномиальных коэффициентов разложения $(a + b)^n$ равна 1024.

а) Найдите n.

б) Найдите наибольший биномиальный коэффициент этого разложения.

в) Сколько в разложении членов с этим наибольшим коэффициентом?

г) Дайте ответы на вопросы пунктов а), б), в), если сумма биномиальных коэффициентов разложения $(a + b)^n$ равна 512.

○**48.29.** Найдите k, при котором достигается наибольшее значение выражения:

а) C_5^k; б) C_{16}^k; в) C_{61}^k; г) $C_{999}^{k-1} + C_{999}^k$.

●**48.30.** а) Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ и любого $x > 0$ верно неравенство $(1 + x)^n > 1 + nx$ (*неравенство Бернулли*).

б) Используя неравенство пункта а), укажите какое-нибудь решение неравенства $1{,}001^n > 1000$.

в) Используя неравенство пункта а), укажите какое-нибудь решение неравенства $0{,}99^n < 0{,}01$.

г) Докажите, что для любого $0 < q < 1$ и любого $a > 0$ неравенство $q^n < a$ верно для всех натуральных n, начиная с некоторого номера.

§49 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

Прочитайте п. 1 и разберите решение примеров 1—2 в § 49 учебника. 434

о49.1. Случайным образом выбирают двузначное натуральное число. Найдите вероятность того, что оно:

а) делится на 5;
б) делится на 13;
в) делится или на 15, или на 25;
г) не делится на 29.

о49.2. Случайным образом выбирают нечётное двузначное натуральное число. Найдите вероятность того, что:

а) его квадрат меньше 1000;
б) его квадрат больше 9000;
в) сумма квадратов его цифр больше 140;
г) сумма квадратов его цифр не больше 10.

о49.3. Два ученика независимо друг от друга написали по одному двузначному натуральному числу. Найдите вероятность того, что:

а) эти два числа различны между собой;
б) сумма чисел равна 100;
в) сумма чисел не больше 25;
г) сумма чисел больше 190.

о49.4. Из набора домино случайно выбирают одну фишку. Найдите вероятность того, что:

а) это дубль;
б) одна из её половинок — пустышка;
в) различие между очками на ней больше 4;
г) сумма очков на ней больше 7.

о49.5. Из значений $n!$ для $n = 1, 2, 3, \dots, 25$ случайно выбирают одно число. Найдите вероятность того, что это число:

а) меньше миллиона;
б) больше миллиарда;
в) делится на миллион;
г) не делится на тысячу.

○49.6. Из чисел, расположенных в пяти первых строчках треугольника Паскаля, случайно выбирают одно число. Найдите вероятность того, что это число:

а) двузначно;
б) нечётно;
в) кратно трём;
г) не является простым числом.

●49.7. В круге с центром в начале координат и радиусом π случайно выбрали точку с целыми координатами. Найдите вероятность того, что:

а) сумма координат этой точки больше 3;
б) произведение координат этой точки меньше 4;
в) эта точка лежит в круге с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{3}$;
г) эта точка лежит вне треугольника с вершинами $(0; 2)$, $(-2; -2)$, $(1; -2)$.

●49.8. Двузначное число составляют так. Его первая цифра получается в результате первого бросания игрального кубика, грани которого пронумерованы цифрами от 1 до 6, а вторая цифра — в результате второго бросания этого кубика. Найдите вероятность того, что это число:

а) состоит из разных цифр;
б) больше 20;
в) кратно 7;
г) простое.

438 **Прочитайте п. 2 и разберите решение примера 3 в § 49 учебника.**

○49.9. Красивых учеников в классе — 22, а умных — 18. Всего в классе 30 учеников, и каждый из них умный или красивый.

а) Сколько учеников, которые и умны, и красивы?
б) Сколько учеников, которые умны, но не красивы?
в) Сколько учеников, которые красивы, но не умны?
г) Измените в условии общее число учеников так, чтобы ответы в пунктах а) и в) были одинаковы.

○49.10. При подготовке к экзамену один ученик решил 44 задачи из общего списка в 50 задач, а второй ученик решил 26 задач из этого же списка. Известно, что каждую задачу из общего списка задач кто-то из учеников решил.

а) Сколько задач были решены и первым, и вторым учеником?
б) Сколько задач были решены первым, но не решены вторым учеником?

в) Сколько задач были решены вторым, но не решены первым учеником?

г) Измените в условии общее число задач так, чтобы ответы в пунктах а) и б) были одинаковы.

49.11. У каждого из туристов есть или тугрики, или «еврики». У 100 туристов есть только тугрики, у 38 туристов есть только «еврики», а у 31 % туристов есть обе валюты.

а) Сколько всего было туристов?

б) Сколько туристов имеют тугрики?

в) Сколько туристов имеют «еврики»?

г) Измените в условии задачи 31 % так, чтобы ответ в пункте а) стал наибольшим из всех возможных.

49.12. Каждый из 30 учеников умный или красивый. Красивых учеников всего 26, умных — 24, а 14 учеников — ростом выше 180 см.

а) Про скольких учеников гарантированно можно утверждать, что они и умные, и красивые, и выше 180 см?

б) Каков ответ в пункте а), если известно, что все умные, но не красивые — ростом не выше 180 см?

в) Каков ответ в пункте а), если известно, что все красивые, но не умные — ростом выше 180 см?

г) Каков ответ в пункте а), если известно, что 12 умных — ростом выше 180 см?

49.13. Экзамен пересдавали три ученика. Рассматриваются события: A — экзамен сдал ровно один ученик; B — хотя бы один ученик; C — не менее двух учеников; D — ровно два ученика. Опишите события:

а) $A + C$; б) $A + D$; в) $B + D$; г) $A + B + C + D$.

49.14. Опишите события, противоположные событиям из пунктов а) — г) предыдущей задачи.

49.15. Из чисел 0, 1, 2, ..., 9 выбирают одно. Рассматриваются события: A — это чётное число; B — это число больше 7; C — это число кратно 3 и не равно 0; D — это или 1, или 4, или 9. Опишите события:

а) AB; б) CD; в) BC; г) $ABCD$.

49.16. Опишите события, противоположные событиям A, B, C, D из предыдущей задачи.

442 **Прочитайте п. 3 и разберите решение примеров 4—6 в § 49 учебника.**

○**49.17.** В тёмном ящике 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы случайно вытаскиваете одновременно 3 билета. Найдите вероятность того, что:

а) все билеты выигрышные;

б) есть ровно один проигрышный билет;

в) есть ровно два выигрышных билета;

г) есть хотя бы один выигрышный билет.

●**49.18.** В тёмном ящике n выигрышных билетов и n проигрышных, $n > 2$. Вы случайно вытаскиваете одновременно 3 билета.

а) Найдите вероятность того, что есть ровно один проигрышный билет.

б) Докажите, что эта вероятность убывает с ростом n.

в) К какому числу стремится эта вероятность при $n \to \infty$?

г) Найдите наименьшее n, начиная с которого эта вероятность будет меньше 0,4.

●**49.19.** В тёмном ящике 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы случайно вытаскиваете одновременно n билетов, $n = 1, 2, 3, ..., 9$. Найдите вероятность $p(n)$ того, что у вас есть ровно один выигрышный билет. Численные результаты соберите в таблицу.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(n)$									

○**49.20.** В тёмном ящике 6 билетов, из которых n билетов выигрышных и $6 - n$ проигрышных, $n = 0, 1, 2, 3, ..., 6$. Вы случайно вытаскиваете одновременно 2 билета. Найдите вероятность $p(n)$ того, что у вас есть ровно один выигрышный билет. Численные результаты соберите в таблицу.

n	0	1	2	3	4	5	6
$p(n)$							

●**49.21.** В тёмном ящике 8 белых и 7 чёрных шаров. Вы случайно вытаскиваете одновременно 4 шара. Найдите вероятность того, что:

а) все шары белые;

б) имеется, как минимум, три белых шара;

в) имеется, как минимум, два чёрных шара;

г) есть хотя бы один белый шар.

●49.22. В тёмном ящике n белых и $n - 1$ чёрных шаров. Вы случайно вытаскиваете одновременно 4 шара.

а) Найдите вероятность того, что имеется, как минимум, три белых шара.

б) Докажите, что эта вероятность убывает с ростом n.

в) К какому числу стремится эта вероятность при $n \to \infty$?

г) Найдите наименьшее n, начиная с которого эта вероятность будет меньше 0,35.

○49.23. Какова вероятность того, что при трёх бросаниях монеты:

а) ни разу не выпадет орёл;

б) ни разу не выпадет решка;

в) орёл выпадет ровно один раз;

г) решка выпадет хотя бы один раз?

○49.24. Решите задачу 49.23 для четырёх бросаний монеты.

●49.25. а) Какова вероятность того, что при n бросаниях монеты решка выпадет хотя бы один раз?

б) Как меняется эта вероятность с изменением n?

в) Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.

г) При каком наименьшем n вероятность появления хотя бы одной решки будет больше 0,999?

○49.26. Три ученика независимо друг от друга написали по одной цифре от 0 до 9. Какова вероятность того, что среди написанных цифр:

а) не будет ни одной цифры 0;

б) будет хотя бы одна цифра 5;

в) не будет ни одной чётной цифры;

г) будет хотя бы одна нечётная цифра?

●49.27. Каждый из n учеников независимо друг от друга написал по одной цифре от 0 до 9.

а) Какова вероятность того, что среди написанных цифр будет хотя бы одна цифра 5?

б) Как меняется эта вероятность с изменением n?

в) Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.

г) При каком наименьшем n вероятность появления хотя бы одной цифры 5 будет больше вероятности её отсутствия?

●49.28. Буквы русского алфавита написаны на карточках. Вы случайно вытаскиваете одну карточку, читаете букву, возвращаете карточку и повторяете выбор. Как только появится гласная буква — процедура заканчивается. (В русском алфавите 33 буквы, из них 10 гласных.)

а) Какова вероятность того, что никаких повторений не потребуется?

б) Какова вероятность того, что хватит двух повторений?

в) Какова вероятность того, что хватит именно n повторений?

г) Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.

49.29. Стрелок не очень меток: вероятность того, что он попадёт в мишень одним выстрелом, равна всего 0,1. Независимо от предыдущих промахов он повторяет выстрелы до первого попадания и после этого прекращает стрельбу.

а) Какова вероятность $p(n)$ того, что ему хватит именно n выстрелов?

б) Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.

в) Численные результаты для $n = 1, 2, 3, \ldots, 7$ соберите в таблицу.

n	1	2	3	4	5	6	7
$p(n)$							

г) Найдите предел суммы $p(1) + p(2) + \ldots + p(n)$ при $n \to \infty$.

49.30. Найдите вероятность p встречи с контролёром при одной поездке, если известно, что вероятность хотя бы одной встречи:

а) при трёх поездках равна 0,875;

б) при четырёх поездках равна 0,9984;

в) при пяти поездках равна 0,98976;

г) при шести поездках равна 0,468559.

Ответы

§ 1

1.3. 112, 113, 114, ..., 147. Наименьшее 112, наибольшее 963. **1.11.** а) 2; 3; б) 4; 3; в) $(n + 3;\ 5n - 3)$, $n \in N$; г) $(11n + 23;\ 5n - 2)$. **1.14.** а) 1; 2; 4; б) 8; в) 1; 2; 3; 4; 6; 12; г) 6; 7; 28; 51. **1.15.** а) 2; 3; 4; 6; 12; б) 1; 2; 3; 6. **1.17.** а) 2; (1; 1); б) 114; (1; 1). **1.18.** а) Да; б) да. **1.19.** а) 1; 2; 4; б) 0,5; 1; 1,5; 3. **1.20.** а) 0,5; 1; 2,5; 5; б) таких значений нет. **1.21.** а) 0; 3; 5; б) −1; 3. **1.23.** а) 1; б) 1; в) 5; г) 6. **1.24.** а) Да, например 6 и 2; б) да, например 2 и 1. **1.38.** а) 23! + 2 делится на 2; 23! + 3 делится на 3; 23! + 4 делится на 4, ... ; 23! + 23 делится на 23; б) 101! + 2 делится на 2; 101! + 3 делится на 3; 101! + 4 делится на 4, ... ; 101! + 101 делится на 101; в) 22, 100; г) 1 000 001! + 2; 1 000 001! + 3; 1 000 001! + 2; ... ; 1 000 001! + 1 000 001. **1.39.** $p = 3$; $q = 2$. **1.40.** а) $p = 11$; $q = 5$; б) $p = 11$; $q = 3$ или $p = 5$; $q = 17$. **1.51.** а) 8; б) 24; в) 18; г) 12. **1.52.** а) 8; б) 18; в) 38; г) 97. **1.53.** а) 2; б) 4; в) 9; г) 24. **1.54.** а) Двумя; б) четырьмя; в) девятью; г) двадцатью четырьмя. **1.55.** а), б) Да, нет; в) нет, нет; г) нет, да.

1.57. а) $\begin{cases} x = 1 + 2k; \\ y = 8 - k; \end{cases}$ $k \in Z$; б) $\begin{cases} x = 4 + k; \\ y = 6k - 1; \end{cases}$ $k \in Z$; в) $\begin{cases} x = 17 - 4k; \\ y = 1 + 7k; \end{cases}$ $k \in Z$; г) $\begin{cases} x = 6 + 7k; \\ y = 1 + 5k; \end{cases}$ $k \in Z$. **1.58.** а) (1; 15); (−1; −15); (15; 1); (−15; −1); (3; 5); (−3; −5); (5; 3); (−5; −3); б) (1; 3); (−1; −3); (1; −3); (−1; 3); в) (1; 1); (−1; −1); г) решений нет. **1.59.** а) 12; б) 46; в) 35; г) 180.

§ 2

2.6. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $1\frac{1}{4}$; г) $\frac{2}{5}$. **2.11.** а) 3; б) 6; в) 5; г) 2. **2.13.** а) $\frac{4}{11}$; б) $12\frac{1}{1665}$; в) $-1\frac{7}{30}$; г) $-\frac{137}{11\,100}$. **2.17.** а) 0,(6); б) 1,8(6); в) 1,(3); г) 2,08(3).

§ 3

3.4. а); б); в); г) Иррациональным. **3.6.** а); б); г) — числа рациональные; в) — число иррациональное. **3.7.** а) $\sqrt{7} - 3$ и $1 - \sqrt{7}$; б) $\sqrt{7} - 3$ и $1 + \sqrt{7}$; в) $\sqrt{7} - 3$ и $\sqrt{7} + 3$; г) $\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$. **3.8.** а) Нет таких чисел; б) $\sqrt{7}$ и $\sqrt{28}$. **3.9.** а) $x^2 - 2 = 0$; б) $x^2 + 10x + 22 = 0$; в) $3x^2 + 12x - 3 = 0$; г) составить такое уравнение невозможно. **3.10.** а) Например, $\alpha = 2 + \sqrt{3}$;

$\beta = 4\sqrt{3}$; б) например, $\alpha = 3 - \sqrt{2}$; $\beta = 4\sqrt{2} - 20$. **3.11.** а) Существует, например, при $a = 2 + \sqrt{3}$ число $c = 4$; б) существует, например, при $a = \dfrac{\sqrt{13} - 1}{2}$ число $c = 3$. **3.17.** а); б) Единственная точка $(0; -2)$. **3.19.** а) Такой треугольник существует, так как $\sqrt{2} + 1 > \sqrt{3}$; б) такого треугольника не существует, так как $\sqrt{3} + \sqrt{5} < 4$.

§ 4

4.4. а); б) Не существует. **4.9.** а) $a < b$; б) $a > b$; в) $a > b$; г) $a > b$. **4.14.** а) 1; б) 1; в) 1; г) 6. **4.15.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 5. **4.16.** а) $3 \leqslant b < 4$; б) $3 < b \leqslant 4$; в) $0 < b \leqslant 1$; г) таких b не существует. **4.17.** а) $[-20; 12]$; б) $(17; 22)$. **4.18.** а) $a > 2{,}5$; б) $\dfrac{1 - \sqrt{7}}{6} < a < 1$; $a > 1$. **4.19.** а) $\left(-1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}; -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$; $a > 2{,}5$; б) $\left(-\dfrac{11}{6}; 0\right)$; $a > 1$.

§ 5

5.3. а) $x \geqslant 0$; б) $x \geqslant 7$; в) $x \leqslant 0$; г) $3 \leqslant x \leqslant 4$. **5.10.** а) $4 - \pi$; б) 1; в) $7 - 2\pi$; г) $5{,}3 - 2\sqrt{7}$. **5.11.** а) 4; б) 8; в) 21; г) 66. **5.13.** а) 1; -9; б) 7; в) 19; -11; г) -1; $\dfrac{2}{3}$. **5.14.** а); б) Решений нет; в) 4; г) -4. **5.15.** а) 4; б) 2; в) 0; 7; 1; г) 2; -1. **5.16.** а) $x > 4$; б) $1 < x < 7$; в) $x \geqslant 2$; г) $-1 \leqslant x \leqslant 2$. **5.17.** а) $x < 3$; б) $(-\infty; 1) \cup (1 + \sqrt{6}; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -\dfrac{5}{6}\right] \cup [1; +\infty)$; г) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. **5.18.** а) 3 или 9; б) 9 или 23. **5.19.** а) 0,5; 1,5; б) 1; 2. **5.20.** а) 9 или 23; б) 2 или 8.

§ 6

6.2. а) $\dfrac{(n + 13)n}{2}$; б) $\dfrac{(9n - 5)n}{2}$; в) $\dfrac{n(n + 53)}{40}$; г) $\dfrac{(n + 2)n}{9}$. **6.3.** а) $-k$ при $n = 2k$; k при $n = 2k - 1$; б) $k(2k + 1)$ при $n = 2k$; $k(1 - 2k)$ при $n = 2k - 1$; в) $\dfrac{n(n + 1)}{2}$ при $n = 2k$; $\dfrac{n(n + 1)}{2} - 1$ при $n = 2k - 1$; г) $-2k(k + 1)$ при $n = 2k$; $2k^2$ при $n = 2k - 1$. **6.12.** а) $\dfrac{29}{596}$; б) $\dfrac{292}{447}$. **6.14.** а); б) Первое равенство неверно уже для $n = 1$. Второе равенство верно для $n = 1$, но не для всех k из $A(k)$ следует $A(k + 1)$. Таким образом, равенство неверно. Третье равенство верно.

§ 7

7.9. а) $S(x) = \dfrac{(4 - x)x}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$; б) $S(x) = \begin{cases} 5(x + 4), & -4 \leqslant x \leqslant 2; \\ 2x + 26, & 2 < x \leqslant 8. \end{cases}$

7.11. а) $y = \pm\sqrt{\dfrac{2x + 12}{3}}$; $x = \dfrac{3y^2 - 12}{2}$; уравнение задаёт функцию вида $x = \varphi(y)$ и не задаёт функцию вида $y = f(x)$; б) $y = x$ или $y = -x - 1$; $x = y$ или $x = -y - 1$ при $x \neq 3, -4$, $y \neq 3, -4$. **7.21.** а) $[-1; 7]$; б) $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$; в) $(0; 1]$; г) $[-1{,}5; 11]$. **7.22.** а) $D(f) = [-3; 2]$, $E(f) = [1; 5]$; б) $D(f) = [-3; 2]$, $E(f) = [0; 9]$. **7.25.** а) $[12; +\infty)$; б) $[-8; 1]$; в) $[-12; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; г) $[-3; 1]$. **7.26.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $(-\infty; -7) \cup$ $\cup (-7; 2) \cup (2; +\infty)$. **7.27.** а) $3x + 2$; б) $-3x - 13$; в) 5; г) $f(f(x)) = 9x - 4$.

7.28. а) $4x^2$; б) $(x - 5)^2$; в) 81; г) x^4. **7.29.** а) $\dfrac{2x + 3}{1 - 2x}$; б) $\dfrac{6x - 1}{2x - 3}$; в) $f(f(5)) = 5\dfrac{2}{11}$; г) $\dfrac{11x + 2}{x + 6}$. **7.31.** а) Если $a > 1$, то $[a; +\infty)$; если $a = 1$, то $(1; +\infty)$; если $-1 < a < 1$, то $[a; 1) \cup (1; +\infty)$; если $a = -1$, то $(-1; 1) \cup$ $\cup (1; +\infty)$; если $a < -1$, то $[a; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; б) если $a \leqslant 0$, то R; если $a > 0$, то $\left[-\dfrac{1}{a}; \dfrac{1}{a}\right]$; в) если $a < 3$, то $(-\infty; a) \cup (a; 3] \cup [4; +\infty)$; если $a = 3$, то $(-\infty; 3) \cup [4; +\infty)$; если $3 < a < 4$, то $(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$; если $a = 4$, то $(-\infty; 3] \cup (4; +\infty)$; если $a > 4$, то $(-\infty; 3] \cup [4; a) \cup (a; +\infty)$; г) если $a > 1$, то $\varnothing$; если $a = 1$, то $\{1\}$; если $-8 < a < 1$, то $[a; 1]$; если $a \leqslant -8$, то $[-8; 1]$. **7.32.** а) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1]$; б) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1]$; в) $(-\infty; -3) \cup$ $\cup (-3; -0{,}5) \cup (-0{,}5; 1]$; г) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1]$. **7.33.** а) $[4; 5]$; б) $[-1; 0] \cup$ $\cup [4; 5]$; в) $[4; 5)$; г) $(-1; 0] \cup (4; 5]$. **7.34.** а) $[-4; 1]$; б) $[-4; 1]$; в) $(-4; 1]$; г) $[-4; -2) \cup (-2; 1]$. **7.35.** а) $[-10; 5]$; б) $[-10; 5]$; в) $[-10; 10]$; г) $[-5; 5]$. **7.36.** а) $[-1; 10]$; б) $[-13; -2]$; в) $[-2; 9]$; г) $[-2; 9]$. **7.37.** а) $a \leqslant -11$; б) $a \geqslant 4$.

7.38. а) $a \geqslant 0$; б) $-\dfrac{4}{3} < a < 0$; в) $a = -\dfrac{4}{3}$; г) $a < -\dfrac{4}{3}$. **7.40.** а) $b = -31$; $-3 < b \leqslant -2$; б) $b = -29$; $5{,}5 \leqslant b < 6{,}5$; в) $(-\infty; -31) \cup (-31; -30) \cup$ $\cup (-30; -29) \cup (-29; -3] \cup [6{,}5; +\infty)$; г) $(-\infty; -32) \cup (-31; -4] \cup [4{,}5; +\infty)$.
7.42. а) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; в) $(-\infty; -12) \cup (-12; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. **7.43.** а) $[5; +\infty)$; б) $(-\infty; 1]$; в) $(-\infty; 2]$; г) $[-1; +\infty)$.

7.44. а) $\{1; 3\}$; б) $(-1; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $[0; +\infty)$. **7.45.** а) $\{0; \pm 2; \pm 4\}$; б) $\{0; 2\}$. **7.47.** а) $[0; 25]$; б) $[0; 5]$; в) $[-27; 125]$; г) $[1; 3]$. **7.48.** а) $[-3; 5]$; б) $[0; 8]$; в) $[0; 8]$; г) $[a - 5; a + 3]$. **7.49.** а) $[-3; 5]$; б) $[0; 8]$; в) $[0; 8]$; г) $[a - 5; a + 3]$. **7.50.** а) 1, 2, 3; б) нет таких значений; в) 2, 3, 4, 5, 6, 7;

г) 0, 1, 2, 3, 4, 5. **7.51.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **7.52.** а) $E(f) = [-5; +\infty)$ при $b \geqslant -5$; б) при $a \geqslant -7$; $E(f) = [-7; +\infty)$. **7.53.** а) При $|a| \geqslant 2\sqrt{3}$; $E(f) = \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right] \cup \left[2\sqrt{3}; +\infty\right)$; б) при $|a| \leqslant 2$; $E(f) = [-2; 2]$. **7.54.** а) $\left(-\infty; -4\sqrt{2}\right] \cup \left[4\sqrt{2}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; -8] \cup [4; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$. 7.55. а) 0; б) 4. **7.56.** а) 0 или 1; б) $\left(\dfrac{2\sqrt{29}}{29}; 1\right)$. **7.60.** а) 2; б) 7; в) 7; г) 0. **7.63.** а) $[1; 33]$; б) $[-6{,}25; 0]$; в) $[-320; 0]$; г) $\left[-1; \dfrac{7}{13}\right]$. **7.66.** а) $1 \leqslant x < 2$; б) $-11 \leqslant x < -10$; в) $-1 \leqslant x < 0$; г) $11 \leqslant x < 12$. **7.67.** а) x — любое целое число; б) -2; в) 0; г) -3. **7.72.** а) $x = k + 0{,}123$, где k принимает любые целочисленные значения; б) 999,123.

§ 8

8.1. а) Убывает на $(-\infty; 0{,}75]$; возрастает на $[0{,}75; +\infty)$; б) убывает на $(-\infty; 1]$; в) убывает на $(-\infty; -0{,}6]$; возрастает на $[-0{,}6; +\infty)$; г) возрастает на $[-0{,}6; +\infty)$. **8.4.** а) Убывает на $[5; +\infty)$; б) возрастает на $[1{,}5; +\infty)$; в) убывает на $(-\infty; 2]$; г) убывает на $(-\infty; 0{,}75]$. **8.6.** а) Убывает на $(-\infty; 0]$; возрастает на $[0; +\infty)$; б) убывает на $(-\infty; 0]$; возрастает на $[0; +\infty)$; в) убывает на $(-\infty; 1{,}5]$; возрастает на $[1{,}5; +\infty)$; г) убывает на $(-\infty; 0]$; возрастает на $[0; +\infty)$. **8.7.** а) Убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[0; 1]$; возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$; б) убывает на $(-\infty; -3]$ и на $[0; 3]$; возрастает на $[-3; 0]$ и на $[3; +\infty)$; в) убывает на $(-\infty; -2]$ и на $[1{,}5; 5]$; возрастает на $[-2; 1{,}5]$ и на $[5; +\infty)$; г) убывает на $(-\infty; -4]$ и на $[0{,}5; 5]$; возрастает на $[-4; 0{,}5]$ и на $[5; +\infty)$. **8.10.** а) Возрастает на $(-\infty; 0]$; убывает на $[0; +\infty)$; б) возрастает на $(-\infty; -3]$; убывает на $[-3; +\infty)$; в) возрастает на $(-\infty; -1)$ и на $(-1; 0]$; убывает на $[0; 1)$ и на $(1; +\infty)$; г) возрастает на $(-\infty; -2)$ и на $(-2; 2]$; убывает на $[2; 6)$ и на $(6; +\infty)$. **8.11.** а) Возрастает на $[-3; -1]$ и на $[0; 2]$; убывает на $[-1; 0]$ и на $[2; 3]$; б) возрастает на $[-2; -1]$ и на $[1; 3]$; убывает на $[-1; 1]$; в) постоянна на $[-3; -1)$; возрастает на $[-1; 0)$ и на $(0; 1]$; убывает на $[1; 2)$ и на $(2; 3]$; г) убывает на $[-3; -2)$, $(-2; -1]$, $[1; 2)$ и $(2; 3]$; возрастает на $[-1; 0)$ и на $(0; 1]$. **8.12.** а) $-0{,}5$; 1; б) $(-\infty; -0{,}5) \cup (1; +\infty)$; в) -8; 6; г) $[-8; 6]$. **8.13.** а) -2; б) $[-\infty; -2{,}5) \cup \left(-2\dfrac{1}{3}; -2\right] \cup (1; +\infty)$. **8.14.** а) $-0{,}5$; б) $\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{8}; -0{,}5\right)$. **8.15.** а) $-0{,}5$; б) $\left(-0{,}5; -\dfrac{1}{3}\right]$. **8.17.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 1. **8.18.** а) 9; б) $\dfrac{1}{4}$; в) 4; г) 0. **8.21.** а) $y = \begin{cases} -\dfrac{4}{3}x - 3, -3 \leqslant x < 0; \\ -\dfrac{4}{3}x + 2, 0 < x \leqslant 3; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \frac{5}{9}(x-1)^2 - 2, & -2 < x < 1; \\ \frac{5}{9}(x-1)^2 - 2, & 1 < x < 4. \end{cases}$ **8.26.** а) $y_{наиб} = -73$, $y_{наим} = -148$; б) наибольшего значения нет; $y_{наим} = y(0) = -100$; в) наибольшего значения нет; $y_{наим} = y(4) = -148$; г) наибольшего значения нет; $y_{наим} = y(4) = -148$. **8.27.** а) $y_{наиб} = 13$; $y_{наим} = -51$; б) $y_{наиб} = 19$; наименьшего значения нет; в) $y_{наиб} = 21$; наименьшего значения нет; г) $y_{наиб} = y(-3) = 21$; наименьшего значения нет. **8.28.** а) 2; б) 2; в) $\frac{1}{3}$; г) 2. **8.29.** а) $y_{наиб} = 1$; $y_{наим} = -1$; б) $y_{наиб} = 0{,}5$; $y_{наим} = -0{,}5$; в) $y_{наиб} = 2{,}5$; $y_{наим} = -2{,}5$; г) $y_{наиб} = 3{,}5$; $y_{наим} = -3{,}5$. **8.30.** а) 2; б) 4; в) 4; г) если n — чётное число, то $y_{наим} = \frac{n(n+2)}{4}$; если n — нечётное число, то $y_{наим} = \frac{(n+1)^2}{4}$. **8.31.** а) $y_{наиб} = y(1) = 5(a+1)$; $y_{наим} = y(-1) = 5a - 3$; б) $y_{наиб} = y(2) = 4 - a$; $y_{наим} = y(-1) = -5 - a$. **8.32.** а) Если $-1 \leqslant a \leqslant 2$, то $y_{наиб} = y(-1) = 5$, $y_{наим} = y(a) = a^2 - 4a$; если $2 < a \leqslant 5$, то $y_{наиб} = y(-1) = 5$, $y_{наим} = y(2) = -4$; если $a > 5$, то $y_{наиб} = y(a) = a^2 - 4a$, $y_{наим} = y(2) = -4$; б) если $1 \leqslant a < 3$, то $y_{наиб} = y(a) = -a^2 + 2a - 3$, $y_{наим} = y(3) = -6$; если $-1 \leqslant a < 1$, то $y_{наиб} = y(1) = -2$, $y_{наим} = y(3) = -6$; если $a < -1$, то $y_{наиб} = y(1) = -2$, $y_{наим} = y(a) = -a^2 + 2a - 3$. **8.33.** а) 3; б) -2. **8.35.** а) 0; б) 1; в) 0; г) корней нет. **8.41.** $f(x) = \frac{x^2 + 19x}{x^3 - 7}$. **8.42.** $h(x) = x^2 - \sqrt{3 + x}$. **8.47.** а) 20; б) 8. **8.48.** а) 0; б) 3. **8.49.** $a = -\frac{1}{6}$. **8.50.** $a = -6$. **8.51.** 0.

§ 9

9.5. а) 7; 11; 13; 0; б) 0; 0; 0; в) 11; 11; 7; г) 0; 0. **9.6.** а) $f(1) > f(31)$; б) $f(11) > f(110)$; в) $f(-17) = f(831)$; г) $f\left(6 + \sqrt[3]{3}\right) = f\left(\sqrt[3]{3} - 6\right)$. **9.7.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **9.14.** а) Нет; б) может, например: $y = \sqrt{1 - 2\{x\}}$; в) нет; г) может, например: $y = \frac{1}{\{x\}}$. **9.15.** а) Нет; б) $y = \{x\} + 6$; в) нет; г) $y = \{x\} + 8$. **9.16.** а) Нет; б) может, например: $y = \{-x\}$; в) может, например: $y = \{x\}$; г) может, например: $y = \left\{\frac{3 - x}{8}\right\}$. **9.20.** а) Наибольшее значение 5; наименьшее -2; б) наибольшее 5; наименьшее -2; в) определить невозможно; г) наибольшее 5; наименьшее -2. **9.21.** а) $x = 1 + 4k$, $k \in Z$; б) $(1 + 4l;\ 4 + 4l]$, $l \in Z$. **9.22.** а) $x = -2 + 5k$; $x = 5l$, $k \in Z$; $l \in Z$; б) $(1 + 5r;\ 2 + 5r]$, $r \in Z$; в) $x = 2 + 5t$, $t \in Z$; г) $(-2 + 5n;\ 5n)$, $n \in Z$. **9.23.** а) $x = 4k$, $k \in Z$; б) $x \in R$; в) $x = -3 + 2n$, $n \in Z$; г) $(-3 + 4l;\ -1 + 4l)$,

$l \in Z$. **9.24.** а) Существует, например: $f(x) = 3 + \sqrt{x} - \sqrt{x}$; б) существует, например: $f(x) = 3 + \sqrt{-x} - \sqrt{-x}$. **9.25.** а) Существует, например: $f(x) = 1$; б) нет. **9.29.** а) — г) Нет. **9.30.** а) — в) Нет; г) да. **9.31.** а) — в) Да; г) нет. **9.32.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **9.33.** а) 1; 1; 1; 1; б) 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; в) 2; 2; 2; 2; г) $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{3}$. **9.34.** а) $T = 1$; $T = 4$; б) $T = 1$; $T = \frac{1}{6}$; в) $T = 20$; $T = 20$; г) $T = 12$; $T = 4{,}4$. **9.36.** а) Нет корней; б) $x = 8n$, $n \in Z$; в) $-\infty < x < +\infty$; г) $-4 \leqslant x \leqslant -3$; $3 \leqslant x \leqslant 5$. **9.37.** а) 0, 0, 1; б) 6. **9.38.** а) -10; б) -8; в) -6; г) $-10{,}2$.

§ 10

10.7. а) Да; б) да; в) нет; г) нет. **10.9.** а) $y = \frac{3+x}{x}$; б) $y = \frac{7+5x}{2x-1}$; в) $y = \frac{2-4x}{x}$; г) $y = \frac{3x+1}{2-x}$. **10.10.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **10.11.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **10.12.** а) $y = \begin{cases} 0{,}5x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{3}x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} \frac{-x-1}{3}, \text{ если } x < 2, \\ -\frac{x+3}{5}, \text{ если } x \geqslant 2; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} \frac{1}{3}x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ -x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} 0{,}5(x-1), \text{ если } x \leqslant 5, \\ 2x-8, \text{ если } x \geqslant 5. \end{cases}$ **10.13.** а) $y = x^2 - 3$, $x \geqslant 0$; б) $y = 2 - x^2$, $x \leqslant 0$; в) $y = \frac{x^2+1}{2}$, $x \geqslant 0$; г) $y = \frac{3-x^2}{5}$, $x \leqslant 0$.

10.14. а) Может; б) не может; в) может; г) может. **10.15.** а) — г) Да. **10.16.** а) Нет, не может (если область её определения не состоит из одного нуля); б) может; в) не может; г) может. **10.17.** а) Да, может; б) может; в) не может; г) может. **10.19.** а) Нет; б) $y = \sqrt{x}$; в) нет; г) $y = -\sqrt{x}$. **10.20.** а) Нет; б) $y = \sqrt{x+2}$; $D(f) = [-1;\ 2)$; $E(f) = [1;\ 2)$; в) нет; г) $y = -\sqrt{x+2}$; $D(f) = [-2;\ 2]$; $E(f) = [-2;\ 0]$. **10.21.** а) Нет; б) $y = \sqrt{x+2} - 3$; $D(f) = [-2;\ +\infty)$; $E(f) = [-3;\ +\infty)$; в) $y = -\sqrt{x+2} - 3$; $D(f) = [-2;\ +\infty)$; $E(f) = (-\infty;\ -3]$; г) нет. **10.22.** а) Нет; б) $y = \sqrt{x-14} + 2$, $D(f) = [14;\ +\infty)$; $E(f) = [2;\ +\infty)$; в) $y = -\sqrt{x-14} + 2$, $D(f) = [18;\ +\infty)$; $E(f) = (-\infty;\ 0]$. **10.23.** а) $y = \frac{x+5}{2}$, $y = x + 6$, на R обратной функции нет; б) $y = 5 - x$,

$y = \dfrac{7-x}{2}$, $y = \begin{cases} \dfrac{7-x}{2}, \text{ если } x < 3, \\ 5 - x, \text{ если } x \geqslant 3; \end{cases}$ в) $y = \dfrac{x-5}{3}$, $y = \sqrt{x}$, на $\boldsymbol{R}$ обратной функции нет; г) $y = 3 - x$, $y = \dfrac{2-x}{7}$, $y = \begin{cases} \dfrac{2-x}{7}, \text{ если } x < 2, \\ 3 - x, \text{ если } x \geqslant 3. \end{cases}$ **10.25.** а) $f(x) = 7$; $x = 1$ и $g(x) = 3$; $x = 5$; б) $f(x^2) = 25$; корни: -3; 3 и $g(x^2) = 4$; корни: -2; 2; в) $f(t) = -7$; $t = 1$ и $g(t) = 15$; $t = -3$; г) $f(3x) = 7$; $x = \dfrac{1}{3}$ и $g(5 - x) = 7$; $x = 0$. **10.33.** а) Да; б) нет. **10.34.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **10.35.** а) $y = \begin{cases} -\sqrt{-x}, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ б) нет; в) $y = \begin{cases} -\sqrt{2-x}, \text{ если } x \leqslant 2, \\ -\sqrt{x-2}, \text{ если } x > 2; \end{cases}$ г) нет.

§ 11

11.4. а) 2-я; б) 4-я; в) нет; г) 3-я. **11.11.** а) IV; б) II; в) III; г) I. **11.12.** а) III; б) II; в) IV; г) IV. **11.13.** а) 6; б) 8; в) 3; г) 5. **11.18.** а) πn; б) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$; в) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$; г) $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$. **11.19.** а) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$; б) $\dfrac{\pi n}{4}$. **11.20.** а) $\dfrac{\pi}{6} + \pi n$; б) $-\dfrac{\pi}{3} + \pi n$; в) $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$; г) $\pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$. **11.21.** а) $\dfrac{2\pi n}{3}$; б) $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi n}{3}$; в) $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$; г) $\dfrac{\pi n}{3}$. **11.22.** а) $2\pi n < t < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\pi n < t < \dfrac{\pi}{2} + \pi n$; в) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n$; г) $-\dfrac{\pi}{2} + \pi n < t < \pi n$. **11.23.** а) $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$; б) $-\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$; в) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n$; г) $-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$. **11.24.** а) $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n < t < \pi n$; б) $\pi n < t < \dfrac{3\pi}{4} + \pi n$; в) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n < t < \dfrac{3\pi}{4} + \pi n$; г) $\dfrac{\pi n}{2} < t < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$. **11.25.** а) $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $2\pi n < t < \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$; в) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n$; г) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < t < -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$. **11.26.** а) $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $-\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$; в) $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < 2\pi n$; г) $\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi n$. **11.29.** а) πn; б) $\dfrac{\pi n}{2}$; в) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$; г) $\dfrac{\pi n}{2}$. **11.30.** а) $\dfrac{\pi n}{3}$; б) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$;

в) $\frac{2\pi n}{3}$; г) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$. **11.31.** а) $\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$; б) $\frac{\pi n}{3}$; в) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$; г) $\frac{\pi n}{4}$. **11.32.** а) $\frac{\pi}{15}$, $\frac{4\pi}{15}$, $-\frac{2\pi}{5}$; б) $\pm\frac{\pi}{8}$, $\pm\frac{3\pi}{8}$; в) $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$; г) $\pm\frac{3\pi}{7}$, $\pm\frac{2\pi}{21}$, $\pm\frac{5\pi}{21}$. **11.33.** а) $\pm\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$; в) $\pm\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $-\frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$. **11.34.** а) −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; б) −1,5; 0,5; 2,5; 4,5; в) −3, −1, 1, 3, 5; г) $-2\frac{2}{3}$, $-1\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $1\frac{5}{6}$, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{5}{6}$.

§ 12

12.6. а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$; в) $\frac{7\pi}{6}$; г) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. **12.8.** а) $x < 0$, $y > 0$; б) $x < 0$, $y > 0$; в) $x < 0$, $y < 0$; г) $x > 0$, $y > 0$. **12.9.** а) $x > 0$, $y < 0$; б) $x < 0$, $y < 0$; в) $x > 0$, $y < 0$; г) $x > 0$, $y < 0$. **12.10.** а) $x < y$; б) $x < y$; в) $x > y$; г) $x < y$. **12.11.** а) $|x| > |y|$; б) $|x| < |y|$; в) $|x| > |y|$; г) $|x| < |y|$. **12.20.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; г) $\frac{\pi}{6} + \pi n$. **12.21.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$. **12.22.** а) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$; в) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; г) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **12.23.** а) $2\pi n < t < \pi + 2\pi n$; б) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; г) $-\pi + 2\pi n < t < 2\pi n$. **12.24.** а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; б) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; в) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$; г) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$. **12.25.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; г) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$. **12.26.** а) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; б) $\pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pi + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; в) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \pi + \pi n$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < 2\pi n$. **12.27.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant t \leqslant 2\pi + 2\pi n$; б) $-\pi + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n <$

$< t < \pi + 2\pi n$; г) $2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$. **12.28.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$; в) $2\pi n < t < \pi + 2\pi n$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$; г) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **12.29.** а) $\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant t \leqslant$ $\leqslant \frac{2\pi}{3} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n < t < \frac{3\pi}{4} + \pi n$; в) $-\frac{\pi}{3} + \pi n < t < \frac{\pi}{3} + \pi n$; г) $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant t \leqslant$ $\leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n$.

§ 13

13.10. а) 3; 5; б) 3; 4; в) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; г) 1; 2,5. **13.12.** а); б); в) Минус; г) плюс. **13.13.** а); в); г) Минус; б) плюс. **13.14.** а); б); г) Минус; в) плюс. **13.19.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$; в) πn; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. **13.20.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **13.30.** а) Минус; б); в); г) плюс. **13.31.** а) Плюс; б) минус. **13.32.** а) 0; б) 0. **13.33.** а) $x > \frac{1}{2}$; б) $x < -2$; $x > 2$. **13.34.** а) $x \leqslant \frac{1}{3}$; б) $-3 \leqslant x \leqslant 3$. **13.35.** а) $x \leqslant 1$; б) $-6 < x < 6$; в) $x \geqslant 1{,}4$; г) $-\infty < x < +\infty$. **13.36.** а) $a > b$; б) $a < b$; в) $a > b$; г) $a < b$. **13.37.** а) $a < b$; б) $a > b$; в) $a < b$; г) $a < b$. **13.38.** а) $\sin\frac{4\pi}{3}$, $\sin\frac{7\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{7}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$; б) $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{7\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{8}$. **13.39.** а) $\cos 4$, $\sin 3$, $\cos 5$, $\sin 2$; б) $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 7$, $\cos 6$; в) $\sin 4$, $\sin 6$, $\sin 3$, $\sin 7$; г) $\cos 3$, $\sin 5$, $\sin 4$, $\cos 2$. **13.40.** а) $\cos 1$, $\sin 1$, 1, $\operatorname{tg} 1$; б) $\operatorname{ctg} 2$, $\cos 2$, $\sin 2$, 2. **13.41.** а) $\sin\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\sin\frac{13}{24}$; б) $\cos 1{,}1$; $\frac{1}{2}$; $\cos 1$. **13.42.** а) 0,5; б) 0,5. **13.43.** а) -1; б) 1. **13.44.** а) $2\pi n < t < \pi + 2\pi n$; б) $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; в) $-\pi + 2\pi n < t < 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **13.45.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n <$ $< t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; г) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **13.46.** а) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < t <$ $< \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$;

г) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$. **13.47.** а) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; б) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n <$ $< t < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; в) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; г) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **13.48.** а) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; б) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$. **13.49.** а) $2\pi n < t <$ $< \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \pi + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n <$ $< t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **13.50.** а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n <$ $< t < \pi + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; г) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **13.51.** а) $\pi n < t <$ $< \frac{\pi}{2} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; $t = 2\pi n$; в) $\pi + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n < t < 2\pi + 2\pi n$; г) $t \neq \frac{\pi n}{2}$. 13.55. 2.

§ 14

14.17. а) $\sin t = -\frac{5}{13}$, $\cos t = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} t = \frac{5}{12}$; б) $\sin t = \frac{24}{25}$, $\cos t = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} t = \frac{24}{7}$; в) $\sin t = -\frac{12}{13}$, $\cos t = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$; г) $\sin t = \frac{15}{17}$, $\cos t = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} t = -\frac{15}{8}$. **14.18.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $\frac{12}{5}$. **14.19.** а) $-\frac{12}{13}$, б) $-1{,}4$. **14.20.** а) $-0{,}18$; б) 4. **14.21.** а) 0,792; б) $-2{,}475$. **14.22.** а) 3,29; б) 5,267. **14.23.** а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{8}$. **14.24.** а) $-\frac{49}{12}$; б) $\frac{2113}{144}$. **14.25.** а) 1,4; б) 1. **14.26.** а) 5; б) $\frac{11}{9}$. **14.27.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $-\frac{3}{4}$. **14.28.** а) $-\frac{1}{3}$; б) 0. **14.29.** а) $\frac{1}{(1+a^2)^2}$; б) $\frac{a}{1+a^2}$; в) $\frac{a^4}{(1+a^2)^2}$; г) $\frac{a^3}{(1+a^2)^2}$. **14.30.** а) $\frac{3a^2+2}{a^2+1}$; б) $\frac{2-3a-5a^2}{1+a^2}$. **14.31.** а) 0;

б) $\frac{1}{\cos t}$. **14.32.** а) $3\sin t$; б) $3\cos t$. **14.33.** а) -6; -2; б) -5; $1\frac{1}{4}$; в) -3; 6; г) -7; 2. **14.39.** а) 6; б) 6.

§ 15

15.7. а) $\sin 160°$, $\sin 40°$, $\sin 120°$, $\sin 80°$; б) $\cos 160°$, $\cos 120°$, $\cos 80°$, $\cos 40°$. **15.8.** а) $\sin 1000°$, $\sin 210°$, $\sin 380°$, $\sin 830°$; б) $\cos 920°$, $\cos 460°$, $\cos 650°$, $\cos 390°$. **15.9.** а) $\sin 990°$, $\cos 990°$, $\sin 22{,}5°$, $\cos 37{,}4°$; б) $\operatorname{tg} 100°$, $\cos 94{,}3°$, $\sin 77°$, $\operatorname{ctg} 225°$. **15.13.** $BC = 8$ см; $AC = 4(\sqrt{3}+1)$ см; $S = 8(\sqrt{3}+1)$ см^2. **15.14.** а) $\frac{25(3+\sqrt{3})}{6}$ см^2. **15.15.** а) $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\sin 22{,}5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos 22{,}5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. **15.16.** а) 1; б) 3. **15.17.** а) 1; б) 0. **15.18.** а) 45,5; б) 90. **15.20.** а) $n = 1, 2, 3, \ldots, 179$; б) ни при каких; в) $n \geqslant 180$. **15.21.** а) $n = 1, 2, 3, \ldots, 89$; б) ни при каких; в) $n \geqslant 90$. **15.22.** а) При любых $n \in N$, кроме чисел вида $n = 360k$, $n = 360k - 1$, $k \in N$; б) ни при каких; в) $n = 360k$, $n = 360k - 1$, $k \in N$. **15.23.** а) $n = 1, 2, 3, \ldots, 178$; б) $n = 180, 181, \ldots, 359$; в) $n = 360k$, $n = 360k - 181$, $k \in N$. **15.24.** $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$; $\sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$; $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

§ 16

16.5. а) Чётная; б) нечётная; в) чётная; г) нечётная. **16.6.** а) Нечётная; б) чётная; в) нечётная; г) чётная. **16.7.** а) 5; $2\pi n < x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x < \pi + 2\pi n$; $n \in Z$; б) 4; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$. **16.13.** а) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; б) $y_{\text{наим}} = -\frac{1}{2}$; $y_{\text{наиб}}$ не существует; в) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3}{2}$; г) $\frac{3}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **16.17.** а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. **16.19.** а) $-\pi$; б) 0; в) 0; г) π. **16.20.** а) $\pm\frac{\pi}{2}$; 0; б) $-\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) нет корней. **16.21.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) π; в) $\frac{\pi}{3}$; г) 0.

16.27. а) Нечётная; б) чётная; в) нечётная; г) чётная. **16.28.** а) Чётная; б) нечётная; в) чётная; г) нечётная. **16.29.** а) $[-1; 1]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-1; 1]$; г) $[-1; 1]$. **16.31.** а) π; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) 4π; г) $\frac{8\pi}{3}$. **16.32.** а) $\sin(8-2\pi)$; б) $\cos(-10+4\pi)$; в) $\sin(-25+8\pi)$; г) $\cos(35-10\pi)$. **16.35.** а) $[-2; 2]$; б) $[0; 625]$; в) $[-1; 5]$; г) $[0; 25]$. **16.36.** а) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; б) $[-4; -1]$; в) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$; г) $[3; 5]$. **16.37.** а) $[3; 15]$; б) $[1; \sqrt{3}]$; в) $\left[1\frac{3}{4}; 4\right]$; г) $[0; 2]$. **16.38.** а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; б) 0, 1, 2, 3; в) 1, 2, 3, 4, 5; г) 3. **16.41.** а) 1,5; 2,5; б) 0,5; 2,5; в) 0,5; 2,5; г) $y_{\text{наим}} = 1$; $y_{\text{наиб}}$ не существует. **16.45.** а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. **16.47.** а) $-\frac{\pi}{2}$; б) 0; в) 0; г) $\frac{\pi}{2}$. **16.48.** а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π; г) 0. **16.49.** а) 2; б) бесконечное множество; в) 0; г) 1. **16.50.** а) 0; б) бесконечное множество; в) 2; г) 2. **16.51.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$. **16.52.** а) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}$. **16.53.** а) $x = 0$; б) $x = \frac{3\pi}{2}$. **16.54.** а) $x < -\frac{5\pi}{6}$; $0 < x < \frac{5\pi}{6}$; б) $x \geqslant \frac{\pi}{3}$.

§ 17

17.11. а) $y = 2\sin x + 1$; б) $y = -1{,}5\cos x + 2$; в) $y = -0{,}5\sin x - 2$; г) $y = 3\cos x - 0{,}5$. **17.12.** а) $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = 1{,}5\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$; г) $y = -3\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$. **17.13.** а) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 1{,}5\cos x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ **17.15.** а) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; б) $\pm\frac{\pi}{3}$.

17.16. а) $x < 0$; $x > 0$; б) $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$.

§ 18

18.10. а) $y = \begin{cases} -x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \sin 2x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} \cos 3x, \text{ если } -\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}, \\ -1, \text{ если } x > \frac{\pi}{3}; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} \sin 2x, \text{ если } x < 0, \\ 2\cos x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} -2\sin x, \text{ если } -2\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \cos \frac{x}{2}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

18.11. а) Возрастает на $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, убывает на $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$; б) убывает на $\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right]$, возрастает на $\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right)$; в) возрастает на $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$, убывает на $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$, возрастает на $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$, убывает на $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$; г) убывает на $\left(3, \frac{7\pi}{6}\right]$, возрастает на $\left[\frac{7\pi}{6}, 4\right)$. **18.12.** а) Возрастает на $[0, 2\pi]$, убывает на $\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$; б) убывает на $(-3; 0]$, возрастает на $[0; 2)$; в) убывает на $\left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$, возрастает на $\left[0, \frac{5\pi}{3}\right)$; г) возрастает на $(3, 2\pi]$, убывает на $[2\pi, 9)$.

18.13. а) $\frac{3\pi}{4} + 3\pi n \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{4} + 3\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **18.14.** а) $\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{4\pi n}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. **18.18.** а) $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$.

§ 19

19.5. а) $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = -1{,}5\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. **19.6.** а) $y = -2\cos\frac{3x}{2}$; б) $y = 3\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$. **19.7.** а) $\frac{3\pi}{2} + 4\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2} + 4\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **19.8.** а) $-\frac{5\pi}{6} + \pi n \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

б) $-\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **19.9.** а) 4π; б) π. **19.10.** а) Убывает на $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, возрастает на $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$; б) убывает; в) возрастает на $\left[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right]$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; г) убывает. **19.11.** а) Убывает на $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, возрастает на $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$; б) возрастает; в) возрастает на $\left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right]$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$; г) убывает на $\left(-1, \frac{\pi}{6}\right]$, возрастает на $\left[\frac{\pi}{6}, 1\right)$. **19.12.** а) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant a \leqslant 4\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant a \leqslant \frac{13\pi}{6} + 4\pi n$, $n \in Z$. **19.13.** а) $\frac{\pi}{6} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{4}$; б) $a = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in N$.

§ 20

20.3. а) Нечётная; б) чётная; в) чётная; г) ни чётная, ни нечётная. **20.5.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) 3π; в) $\frac{\pi}{5}$; г) $\frac{5\pi}{2}$. **20.6.** а) Минус; б) минус; в) плюс; г) минус. **20.13.** а) Ни чётная, ни нечётная; б) нечётная; в) чётная; г) нечётная. **20.14.** а) Нечётная; б) чётная; в) нечётная; г) нечётная. **20.15.** а) π; б) 2π. **20.20.** а) Возрастает на $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$; б) убывает на $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right)$, $n \in Z$; в) убывает на $\left(-\frac{3\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$; г) возрастает на $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{7\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **20.7.** а) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n$; в) $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; г) $\frac{3\pi}{4} + \pi n \leqslant x \leqslant \pi + \pi n$. **20.28.** а) $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; б) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < 2\pi n$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; г) $2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$;

$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$. **20.29.** $x = \frac{1}{3}$. **20.30.** а) 4; б) 11.

§ 21

21.3. а) $[-1;\ 1]$; б) $[2;\ 3]$; в) $[-2;\ 2]$; г) $\left[-2;\ -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};\ 2\right]$. **21.4.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **21.5.** а) $[-\pi;\ \pi]$; б) $[-2\pi;\ 2\pi]$; в) $[0;\ \pi]$; г) $[0;\ 2\pi]$. **21.6.** а) Нечётная; б) чётная; в) ни чётная, ни нечётная; г) нечётная. **21.16.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{5\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{7\pi}{12}$. **21.17.** а) 0; б) $\frac{\pi}{3}$. **21.18.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 0; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **21.19.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\sqrt{3}$. **21.21.** а) $[-1;\ 1]$; б) $[0;\ 2]$; в) $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$; г) $[1;\ 2]$. **21.23.** а) $[0;\ 2\pi]$; б) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$; г) $[-\pi;\ \pi]$. **21.24.** а) Чётная; б) нечётная; в) ни чётная, ни нечётная; г) нечётная. **21.33.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{7\pi}{12}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{6}$. **21.34.** а) $-\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{11\pi}{3}$; в) π; г) π. **21.35.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 1; г) -1. **21.36.** а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **21.37.** а) $[-1;\ 1]$; б) $[0;\ 2]$; в) $\left[-\frac{1}{4};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{3}{4}\right]$; г) $\left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$. **21.38.** а) Нечётная; б) чётная; в) ни чётная, ни нечётная; г) ни чётная, ни нечётная. **21.39.** а) $(-\pi;\ \pi)$; б) $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$; г) $(0;\ 2\pi)$. **21.46.** а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{15}{17}$; г) $-\frac{3}{4}$. **21.47.** а) $\frac{4}{5}$; б) $-\frac{12}{5}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{4}{3}$. **21.48.** а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{12}{13}$. **21.54.** а) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) нет корней; в) 1; г) $-\frac{1}{2}$. **21.55.** а) 0; $1\frac{2}{3}$; б) 3; в) $\frac{1}{3}$, 3; г) 0; 3; 5. **21.56.** а) 4; б) $\frac{2}{3}$. **21.57.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) ± 1. **21.58.** а) $-1{,}5$; б) 9; -1; в) нет корней; г) 2; 3. **21.59.** а) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) 1; г) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. **21.60.** а) $-1 \leqslant x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $x > -1$; в) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; г) $x \geqslant -\sqrt{3}$.

21.61. а) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $-1 \leqslant x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

21.62. а) $-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x \geqslant \sqrt{3}$; в) $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; г) $x < -1$; $x > 1$.

21.63. а) 200; б) 100; в) 50; г) 50. **20.64.** а) 1; б) 12; в) 5; г) 16. **20.65.** а) 5; б) нет корней.

§ 22

22.3. а) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; б) $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{10\pi}{3}$; в) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; г) $\pm\pi$. **22.5.** а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$; б) $\pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n$. **22.9.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{2}{3} + \pi n$; в) $(-1)^n\arcsin\frac{3}{4} + \pi n$, πn; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

22.10. а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{3} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **22.11.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. **22.20.** а) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$; $4\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 3\pi n$; в) $\frac{2\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$; г) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$. **22.21.** а) $\frac{7\pi}{12} + \pi n$; б) $\pi + 2\pi n$; в) $8\pi n$, $-\frac{4\pi}{3} + 8\pi n$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $\frac{2\pi n}{3}$. **22.22.** а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{15\pi}{4}$; в) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$; г) $\pm\frac{5\pi}{4}$, $\pm\frac{3\pi}{4}$.

22.23. а) 2; б) 3. **22.25.** а) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; в) $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; г) $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. **22.26.** а) 3; б) 2. **22.27.** а) $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$; б) $\pm\frac{\pi}{18}$, $\pm\frac{11\pi}{18}$, $\pm\frac{13\pi}{18}$; в) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$; г) $\frac{3\pi}{16}$, $\frac{7\pi}{16}$, $\frac{11\pi}{16}$, $\frac{15\pi}{16}$. **22.28.** а) $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$; б) 0, 2π, 4π. **22.29.** а) -2π, 0, 2π, 4π; б) $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{4}$.

22.30. а) $\frac{7\pi}{8}$; б) $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$; в) $-\frac{\pi}{8}$, г) $-\frac{\pi}{8}$. **22.31.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) 0, $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$; в) $-\frac{2\pi}{3}$;

г) $-\frac{2\pi}{3}$, 0, $\frac{\pi}{3}$. **22.32.** а) 3; б) 3. **22.33.** а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; в) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$. **22.34.** а) $\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos\frac{2}{3} + 2\pi n$; б) $-\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi n < t < \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi n$; в) $-\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n < t < \arccos\frac{2}{3} + 2\pi n$; г) $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi n$.

22.35. а) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n \leqslant t \leqslant 2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$; в) $-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n < t < \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n$; г) $-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n \leqslant t \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$. **22.36.** а) $\frac{\pi}{3} + \pi n < t < \frac{2\pi}{3} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < -\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) $-\arccos\frac{1}{3} + \pi n < t < \arccos\frac{1}{3} + \pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n < t < \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$. **22.38.** а) $-\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n < t < \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$; б) $-\arcsin 0{,}6 + 2\pi n \leqslant t \leqslant \pi + \arcsin 0{,}6 + 2\pi n$; в) $\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$; г) $\pi + \arcsin 0{,}6 + 2\pi n < t < 2\pi - \arcsin 0{,}6 + 2\pi n$. **22.39.** а) $\pi + \arcsin 0{,}8 + 2\pi n < t < 2\pi - \arcsin 0{,}8 + 2\pi n$; б) $-\arcsin 0{,}8 + 2\pi n \leqslant t \leqslant \pi + \arcsin 0{,}8 + 2\pi n$. **22.40.** а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$; $\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; б) $\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$. **22.41.** а) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$; б) $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$;

в) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\pi n$; г) $\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+\pi n$. **22.42.** а) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\operatorname{arctg}3+\pi n$; б) $\pi n<x<\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}+\pi n$; в) $\operatorname{arcctg}2+\pi n\leqslant x\leqslant\pi+\pi n$; г) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+\pi n$. **22.43.** а) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<-\operatorname{arctg}3+\pi n$, $\operatorname{arctg}3+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$; б) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$; в) $-\operatorname{arctg}3+\pi n<x<\operatorname{arctg}3+\pi n$; г) $\pi n<x<\operatorname{arctg}2+\pi n$. **22.44.** а) $-\frac{7\pi}{12}+\pi n<x<\frac{\pi}{12}+\pi n$; б) $\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}$; в) $-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$; г) $-2\arcsin\frac{1}{7}+4\pi n<x<2\pi+2\arcsin\frac{1}{7}+4\pi n$. **22.45.** а) $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n<x<\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<2\pi+2\pi n$; в) $\frac{\pi}{18}-\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{\pi}{18}+\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{2\pi n}{3}$; г) $\frac{5\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{25\pi}{12}+2\pi n$. **22.46.** а) $-\arcsin\frac{4}{5}+2\pi n<x<\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n$; б) $\pi-\arcsin\frac{2}{7}+2\pi n<x<2\pi-\arccos 0{,}6+2\pi n$. **22.47.** а) $\operatorname{arctg}1{,}5+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $\pi+\operatorname{arctg}1{,}5+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\arccos\left(-\frac{3}{7}\right)+2\pi n$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\operatorname{arctg}(-0{,}1)+2\pi n$. **22.48.** а) $\arcsin(-0{,}8)+2\pi n<x<2\pi n$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<\pi+2\pi n$; б) $\arccos\frac{4}{9}+2\pi n<x<\operatorname{arcctg}(-3)+2\pi n$; $\pi+2\pi n<x<2\pi-\arccos\frac{4}{9}+2\pi n$. **22.49.** а) $-\frac{19\pi}{12}<x<-\frac{11\pi}{12}$; $-\frac{7\pi}{12}<x<\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}<x<\frac{13\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}<x\leqslant 5$; б) $-5<x<-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{4\pi}{3}<x<-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{3}<x<-\frac{\pi}{6}$; $0<x<1$. **22.50.** а) -3, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n=0,1,2,3,\dots)$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n=-1,-2,-3,\dots)$; б) 6, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ $(n=2,3,4,\dots)$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ $(n=0,$

$-1, -2, ...)$. **22.51.** а) $0, \pi, -\pi, 4, -4$; б) 1; $\frac{3}{4}, -\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ $(n = \pm1, \pm2, \pm3, ...)$; в) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 0, 7$; г) $1, 1\frac{1}{3}, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n = \pm1, \pm2, ...)$. **22.52.** а) $x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $x \neq \pi n$; в) $x > 0, x \neq \pi n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$; г) $x > 5$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n = 2, 3, 4, ...)$. **22.53.** а) $\{-1, 1\}$; б) $\{-1, 1\}$. **22.54.** а) $\{-1, 1\}$; б) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **22.55.** а) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n$; в) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$; г) πn, $\frac{3\pi}{4} + \pi n$. **22.56.** а) $2, \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$. **22.57.** а) $3, \pi n$; б) $-2, \frac{\pi}{2} + \pi n$. **22.58.** а) 1, $4, \pi n$; б) $-5, -7, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. **22.59.** а) 8; б) 7. **22.60.** а) $2\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x < 2\pi n, 2\pi n < x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; в) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; г) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < 2\pi n$, $2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **22.61.** а) $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2$; б) $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 1$. **22.62.** а) πn; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$. **22.63.** а), б) Нет решений. **22.64.** а) $0 \leqslant a \leqslant 1$; б) $0 \leqslant a \leqslant 0{,}5$, $2 \leqslant a \leqslant 2{,}5$; в) $\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 1$; г) $-2 \leqslant a < -\sqrt{2}, \sqrt{2} \leqslant a \leqslant 2$. **22.65.** а) $-\frac{5}{2} \leqslant a \leqslant \frac{5}{3}$; б) $-1 \leqslant a \leqslant \frac{7}{3}$. **22.66.** а) $\frac{\pi}{6} + (-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{a-1}{a+1} + \frac{\pi n}{2}$, если $a \geqslant 0$; нет решений, если $a < 0$; б) $-\frac{\pi}{2} \pm 2\arccos\frac{2a-1}{a-2} + 4\pi n$, если $-1 \leqslant a \leqslant 1$; нет решений, если $a < -1$ или $a > 1$. **22.67.** а) $\pm\frac{1}{6} + n, n \in Z$; б) $\pm\arccos\frac{1}{12} + 2\pi n, \pm\arccos\frac{5}{12} + 2\pi n, \pm\arccos\left(-\frac{7}{12}\right) + 2\pi n, \pm\arccos\left(-\frac{11}{12}\right) + 2\pi n$. **22.68.** а) $-2 \leqslant x \leqslant 0, x = 2$; б) $-1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, x = 2$. **22.69.** а) $-2 < a < 2$; б) $1 \leqslant a \leqslant 2$.

§ 23

23.1. а) $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$; б) $(-1)^{n+1}\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}$; в) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+$
$+\pi n$; г) $\pi+4\pi n$; $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **23.2.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$;
б) $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$; в) $\pi+2\pi n$; г) $\pm\pi+6\pi n$. **23.3.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$;
в) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $(-1)^n\arcsin\frac{1}{5}+\pi n$; г) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$. **23.4.** а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}+\pi n$;
б) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}5+\frac{\pi n}{2}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}2+\pi n$; г) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$,
$2\operatorname{arcctg}\frac{5}{7}+2\pi n$. **23.5.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}2+\pi n$; б) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n$;
в) $\operatorname{arctg}2+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$; г) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\pi n$. **23.6.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+$
$+\pi n$; б) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$. **23.7.** а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. **23.8.** а) 4;
б) 6; в) 6; г) 9. **23.9.** а) $\frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi n}{2}$, $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$. **23.10.** а) πn; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; в) $\frac{\pi n}{3}$;
г) $2\pi n$. **23.11.** а) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n$; б) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$; в) $-\operatorname{arctg}2{,}5+\pi n$; г) $\frac{\pi}{2}+\pi n$,
$\operatorname{arctg}3+\pi n$. **23.12.** а) $-\frac{\pi}{3}+\pi n$; б) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; в) $\operatorname{arctg}3+\pi n$; г) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$.
23.13. а) πn, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{6}+\pi n$; в) πn, $\operatorname{arctg}3+\pi n$; г) $\frac{\pi}{2}+\pi n$,
$\frac{\pi}{3}+\pi n$. **23.14.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}3+\pi n$; б) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}3+\pi n$; в) $\frac{\pi}{4}+\pi n$,
$-\operatorname{arctg}2+\pi n$; г) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$. **23.15.** а) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$;
в) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; г) $\frac{\pi}{51}+\frac{\pi n}{17}$. **23.16.** а) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi n}{2}$;
б) $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi n}{3}$, $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{3}$. **23.17.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$.
23.18. а) $\operatorname{arctg}5+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$; б) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}2+\pi n$; в) $\frac{\pi}{4}+\pi n$,
$-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$; г) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}3+\pi n$. **23.19.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{6}+\pi n$; б) πn,

$-\operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi n$. **23.20.** а) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi n}{4}, -\frac{1}{4}\operatorname{arctg} 1{,}5 + \frac{\pi n}{4}$.

23.21. а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$; б) $\frac{3\pi}{2} + 3\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 3\pi n$. **23.22.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$. **23.23.** а) πn, $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 7 + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$.

23.24. а) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n$; б) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **23.25.** а) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ y = \pi + 2\pi k; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \\ y = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}. \end{cases}$

23.26. а) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases}$ $\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \\ y = \pi + 2\pi k; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \pi + 4\pi n, \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \end{cases}$

$\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k. \end{cases}$ **23.27.** а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{6} + \pi n$.

23.28. а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$. **23.29.** а) Нет решений; б) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; г) нет решений. **23.30.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $\frac{\pi n}{3}$.

23.31. а) Нет решений, если $-1 < a < 1$; $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, если $a < -\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, если $a = \sqrt{2}$; $(-1)^n \arcsin\frac{1}{a} + \pi n$, если $a < -\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < a \leqslant -1$; $1 \leqslant a < \sqrt{2}$; $a > \sqrt{2}$; б) нет решений, если $-1 < a < 1$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, если $a = -\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, если $a = \sqrt{2}$; $\pm\arccos\frac{1}{a} + 2\pi n$, если $a < -\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < a \leqslant -1$; $1 \leqslant a < \sqrt{2}$; $a > \sqrt{2}$.

23.32. а) -1; б) ± 1. **23.33.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, πn. **23.34.** а) $\frac{3\pi}{2} + 3\pi n$; б) $\pi + 2\pi n$. **23.35.** а) $\varnothing$; б) $2\pi + 24\pi n$. **23.36.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

23.37. а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $-\operatorname{arctg} 3 + \pi(2n + 1)$; б) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi(2n + 1)$.

23.38. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\pi + 2\pi n$. **23.39.** а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n <$

$< x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$.

23.40. а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi n$. **23.41.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; б) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; в) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$; г) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. **23.42.** а) $\operatorname{arctg} 5 + \pi n < x \leqslant \frac{5\pi}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \operatorname{arctg} 5 + \pi n$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x \leqslant \operatorname{arctg} 2 + \pi n$; г) $-\frac{\pi}{2} + \pi n \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi n$. **23.43.** а) $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + 2\pi n$; б) $x = 2\pi n$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 2\pi n$. **23.44.** а) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) нет решений.

23.45. $x = 2\pi n$.

§ 24

24.20. а) 2; б) 3; в) 8; г) 12. **24.21.** а) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$; б) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$; в) $(-1)^n\frac{\pi}{42} + \frac{\pi n}{7}$; г) $\pm\frac{5\pi}{72} + \frac{\pi n}{6}$. **24.22.** а) 15°; б) 15°. **24.23.** а) $\pi + 2\pi n$; б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$.
24.24. а) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$; б) $-\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$. **24.25.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n$.
24.26. а) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\pi + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$.
24.27. а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; б) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.
24.28. а) $\frac{4\sqrt{3} + 3}{10}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$. **24.29.** а) $\frac{12\sqrt{3} - 5}{26}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{-5\sqrt{3} - 12}{26}$; г) $\frac{5}{13}$. **24.30.** а) $\frac{77}{85}$; б) $\frac{36}{85}$. **24.31.** а) $-\frac{84}{85}$; б) $\frac{13}{85}$.
24.32. а) $-\frac{1519}{1681}$; б) $\frac{720}{1681}$. **24.33.** а) $-\frac{12\sqrt{3} + 5}{26}$; б) $\frac{5}{13}$; в) $-\frac{12}{13}$;

г) $\frac{5\sqrt{3}-12}{26}$. **24.34.** а) $-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$. **24.35.** а) $-\frac{36}{85}$; б) $\frac{77}{85}$. **24.36.** а) $-\frac{63}{65}$; б) $-\frac{16}{65}$. **24.37.** а) $\frac{\pi}{12}+\pi n<x<\frac{5\pi}{12}+\pi n$; б) $2\arccos\left(-\frac{2}{7}\right)+4\pi n<x<2\pi+2\arccos\frac{2}{7}+4\pi n$; в) $-4\arcsin\frac{1}{3}+8\pi n<x<4\pi+4\arcsin\frac{1}{3}+8\pi n$; г) $\frac{-5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$. **24.38.** а) $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{1}{7}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2\pi n}{7}<x<\frac{2\pi-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)}{7}+\frac{2\pi n}{7}$; в) $\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3}\arcsin\frac{2}{7}+\frac{4\pi n}{3}<x<\frac{4\pi}{3}-\frac{2}{3}\arcsin\frac{2}{7}+\frac{4\pi n}{3}$; г) $-\frac{\pi}{3}+\frac{8\pi n}{3}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{8\pi n}{3}$. **24.40.** а) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$; б) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$. **24.41.** а) $a<0$; б) $a>0$. **24.42.** а) $a>b$; б) $a<b$. **24.43.** а) $a<b$; б) $a>b$. **24.44.** а) $a<b$; б) $a<b$. **24.45.** а) $\frac{b-a}{b+a}$; б) $\frac{a+b}{a-b}$. **24.49.** а) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$; б) $-\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{10}$; г) $\frac{5}{13}$. **24.50.** а) $\frac{6\sqrt{2}-4}{15}$; б) 1.

§ 25

25.10. а) $\frac{1}{5}$; б) $-\frac{41\sqrt{3}+80}{23}$. **25.11.** а) 1; б) $\frac{1}{7}$. **25.12.** а) -2; б) $-\frac{3}{2}$. **25.13.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-1\frac{1}{6}$. **25.14.** а) $-\frac{17}{7}$; б) $\frac{7}{17}$. **25.15.** а) $-\frac{25\sqrt{3}+48}{39}$; б) $\frac{1}{7}$. **25.17.** а) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$; б) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$. **25.18.** а) $-\frac{11\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}$; б) $-\frac{17\pi}{30}, -\frac{\pi}{15}, \frac{13\pi}{30}, \frac{14\pi}{15}, \frac{43\pi}{30}, \frac{29\pi}{15}$. **25.19.** а) $-\frac{7\pi}{10}+\pi n<x<\frac{\pi}{20}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$.

25.20. а) $\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\pi n, \\ y=\operatorname{arctg}2+\pi k, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n, \\ y=-\frac{\pi}{4}+\pi k; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\pi n, \\ y=\operatorname{arctg}3+\pi k, \end{cases}$

$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 4{,}5 + \pi n, \\ y = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k. \end{cases}$ **25.21.** а) $\beta = \dfrac{3\pi}{4}$. **25.22.** а) 1,8; б) $\dfrac{1}{7}$; в) $\dfrac{6 - 5\sqrt{3}}{13}$;

г) $-3\dfrac{3}{7}$. **25.24.** 3.

§ 26

26.7. а) $-0{,}5$; б) 1; в) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\sqrt{3}$. **26.8.** а) $-1{,}5$; б) 2; в) $-\sqrt{2}$; г) -1.
26.9. а) 0; б) $2\cos t$. **26.10.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\cos t$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $-\cos t$. **26.11.** а) -1; б) $-\dfrac{1}{\cos t}$. **26.12.** а) $\cos\alpha$; б) $-\dfrac{\cos 2y}{\sin^2 y}$. **26.14.** а) 36; б) 5. **26.15.** а) -6; б) 7.
26.16. а) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\dfrac{1}{2}$. **26.17.** а) 1; б) $\dfrac{1}{2}$. **26.18.** а) 1; б) 1. **26.19.** а) 1; б) $\sqrt{3}$.
26.20. а) $\dfrac{11}{13}$; б) 17. **26.21.** а) $2\pi n$; б) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$; г) $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$. **26.22.** а) $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$. **26.23.** а) Корней нет; б) любое действительное число. **26.24.** а) $-\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$; б) $-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi n}{3}$.
26.25. а) $-2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$; б) $-\pi + 3\pi n$. **26.26.** а) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$; б) $-\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}$, $-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} 3 + \dfrac{\pi n}{3}$; в) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n$; г) $-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} 4 + \dfrac{\pi n}{3}$, $-\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}$. **26.27.** а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$; б) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + 2\pi n$; в) πn, $-\dfrac{\pi}{3} + \pi n$; г) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi n$. **26.28.** а) $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n$; б) $(-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n$; в) $\pi + 2\pi n$, $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$; г) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}$. **26.29.** а) $\dfrac{\pi n}{2}$, $-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} + \dfrac{\pi n}{2}$; б) $\dfrac{\pi n}{3}$, $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} 6 + \dfrac{\pi n}{3}$. **26.30.** а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + 2\pi n$; б) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$; в) $\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{4}$, $-\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \dfrac{\pi n}{4}$; г) $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi n$. **26.31.** а) πn; б) $\pi + 2\pi n$, $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$. **26.35.** а) $\dfrac{2\pi}{5}$; б) $\dfrac{\pi}{10}$; в) $-\dfrac{2\pi}{5}$; г) $\dfrac{2\pi}{5}$. **26.36.** а) $\dfrac{3\pi}{10}$; б) $\dfrac{4\pi}{5}$; в) $-\dfrac{3\pi}{10}$; г) $\dfrac{9\pi}{14}$.

§ 27

27.18. а) $2\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$; в) $2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $-2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

27.20. а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{16}$. **27.21.** а) 1; б) 0. **27.22.** а) 2; б) −2. **27.23.** а) $\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$; г) $\frac{14 + \sqrt{3}}{64}$. **27.24.** а) $2\frac{3}{8}$; б) $-\frac{23\sqrt{2}}{16}$. **27.25.** а) $\frac{1}{32}$; б) $\frac{1}{64}$. **27.27.** а) $-\frac{120}{169}$; б) $\frac{119}{169}$; в) $-\frac{120}{119}$; г) $-\frac{119}{120}$. **27.28.** а) $\frac{24}{25}$; б) $\frac{7}{25}$; в) $\frac{24}{7}$; г) $\frac{7}{24}$. **27.29.** а) $\frac{24}{25}$; б) $\frac{7}{25}$; в) $\frac{24}{7}$; г) $\frac{7}{24}$. **27.30.** а) $\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{7}}{7}$, $\sqrt{7}$; б) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$, -2, $-\frac{1}{2}$. **27.31.** а) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $-\frac{1}{3}$, -3 или $-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $-\frac{1}{3}$, -3; б) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$, 3. **27.32.** а) $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$; $-\frac{2a}{1 + a^2}$; б) $\frac{1 - a^2}{1 + a^2}$; $\frac{2a}{1 + a^2}$. **27.33.** а) $\frac{4}{5}$; б) $-2\sqrt{2}$. **27.34.** а) $1 - 2a^2$; б) $1 - 2a^2$. **27.35.** а) $\frac{17}{18}$; б) $-\frac{1}{5}$. **27.36.** а) $\frac{97}{169}$; б) $-\frac{485}{2197}$. **27.37.** а) $a > b$; б) $a < b$. **27.38.** а) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; б) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. **27.39.** а) $x = \pi n$; б) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. **27.40.** а) 0,296; б) $\pm\frac{7\sqrt{15}}{32}$; в) 0,296; г) $-\frac{79}{81}$. **27.41.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **27.44.** а) $\frac{24}{25}$, $-\frac{7}{25}$, $-\frac{24}{7}$, $-\frac{7}{24}$; б) $-\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$, $-\frac{24}{7}$, $-\frac{7}{24}$; в) $-\frac{120}{169}$, $\frac{119}{169}$, $-\frac{120}{119}$, $-\frac{119}{120}$; г) $\frac{120}{169}$, $\frac{119}{169}$, $\frac{120}{119}$, $\frac{119}{120}$. **27.45.** а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $-\frac{1}{3}$; в) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$, $\frac{5\sqrt{26}}{26}$, $-\frac{1}{5}$; г) $\frac{\sqrt{26}}{26}$, $\frac{5\sqrt{26}}{26}$, $\frac{1}{5}$. **27.48.** а) 0, π, 2π; б) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; в) 0, π, 2π; г) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$. **27.49.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$; в) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; г) $\frac{\pi}{4} + \pi n$. **27.50.** а) −120°; б) −240°. **27.51.** а) πn, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$; б) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$. **27.52.** а) 0, π, 2π; б) $\frac{7\pi}{9}$. **27.53.** а) 2; б) 4. **27.54.** а) 7; б) 9. **27.55.** а) $2\pi n$, $\pi + 4\pi n$; б) $2\pi n$; в) $\pi + 2\pi n$, $4\pi n$; г) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **27.56.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6}$; в) $\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; г) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$.

27.57. а) $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{3\pi}{4}$, $\pm\frac{5\pi}{4}$; б) $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{5\pi}{6}$, $\pm\frac{7\pi}{6}$. **27.58.** а) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi n$. **27.60.** а) $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + 2\pi n$; $-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + 2\pi n$; б) $2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2\pi n$; $-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4} + 2\pi n$. **27.61.** а) $\frac{1}{3}$; б) -3. **27.62.** а) $-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$; б) $-\frac{4\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$. **27.63.** а) $\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{13\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$; б) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$. **27.64.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$; в) $\frac{\pi n}{3}$; г) $-\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi n}{2}$. **27.65.** а) 2; -1; б) 3; -1. **27.66.** а) $4\frac{1}{8}$; 1; б) 2; -4. **27.67.** а) $2\frac{1}{8}$; -4; б) 4; $-2\frac{1}{8}$.

§ 28

28.7. а) $2\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $2\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$; в) $4\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$. **28.8.** а) $4\sin 6x\cos^2\frac{x}{2}$; б) $4\cos x\cos^2\frac{3x}{2}$. **28.9.** а) $4\cos t\cos\frac{t}{2}\sin\frac{5t}{2}$; б) $-4\sin t\sin 2t\cos 5t$. **28.14.** а) -1; б) -1; в) $-\sqrt{3}$; г) -1. **28.15.** а) 5; б) $-\frac{3}{4}$. **28.16.** а) 1,5; б) 0,5. **28.17.** а) $\frac{1}{2}$; б) 4. **28.23.** а) $\frac{a}{b}$; б) $-\frac{a}{b}$. **28.26.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi n}{8}$; в) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi n}{3}$; г) $\frac{\pi n}{7}$, $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}$. **28.27.** а) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi n}{4}$, $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$. **28.28.** а) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$; б) $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$; в) $\frac{\pi}{40} + \frac{\pi n}{10}$; $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$. **28.29.** а) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi n}{6}$; в) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$. **28.30.** а) $\frac{2\pi n}{7}$, $\frac{2\pi n}{3}$; б) $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$. **28.31.** а) $\frac{\pi n}{6}$, $n \neq 3 + 6k$; б) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$; в) $\frac{\pi n}{2}$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pi + 2\pi n$. **28.32.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $(-1)^n\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$. **28.33.** а) 3; б) 2. **28.34.** а) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{9}$; б) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$. **28.35.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$,

$\frac{2\pi n}{9}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. **28.36.** а) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$.

§ 29

29.4. а) $\frac{1}{4}(\sin 24^\circ - \sin 4^\circ + \sin 12^\circ + \sin 8^\circ)$; б) $\cos 35^\circ - \cos 45^\circ + \cos 5^\circ - \cos 15^\circ$. **29.5.** а) $\frac{1}{4}(\sin(x + y - z) + \sin(x + z - y) + \sin(y + z - x) - \sin(x + y + z))$; б) $\frac{1}{4}(\cos(x + y - z) + \cos(x + z - y) + \cos(y + z - x) + \cos(x+y+z))$. **29.6.** а) $\frac{1}{4}(2\cos 4x - \cos 2x - \cos 6x)$; б) $\frac{1}{4}(2\sin 3x + \sin 7x - \sin x)$. **29.12.** а) 1; б) $\frac{1}{4}$. **29.13.** а) 1; б) 2. **29.14.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **29.15.** а) $-\frac{\sqrt{3}+1}{4}$; б) $\sqrt{2}$. **29.16.** а) $\frac{3}{16}$; б) $\frac{1}{16}$. **29.17.** а) $a < b$; б) $a > b$. **29.19.** а) 5; б) 82. **29.20.** а) 3; б) 2; в) 2; г) 3. **29.21.** а) πn; б) $\frac{\pi}{6} + \pi n$. **29.22.** а) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **29.23.** а) $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; в) πn; г) $2\pi n,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **29.24.** а) $\pm\frac{\pi}{6}$; б) $\pm\frac{\pi}{4}$. **29.25.** а) $\frac{\pi n}{2}$; б) πn. **29.26.** а) $\frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{7\pi}{8} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; в) $-\frac{7\pi}{12} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{12} + \pi n$; г) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **29.27.** а) $\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n, \\ y = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \\ y = \pi k. \end{cases}$ **29.28.** а) $y_{\text{наиб}} = \frac{3}{4},\ y_{\text{наим}} = -\frac{1}{4}$; б) $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{4},\ y_{\text{наим}} = -\frac{3}{4}$.

§ 30

30.4. а) $3\sqrt{3}\sin\left(t + \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$, где $\varphi = \arcsin\frac{5\sqrt{3}}{9}$; б) $6\sin\left(t - \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$, где $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{34}}{6}$. **30.5.** а) -1; б) -2; в) 1; г) 1. **30.6.** а) -2; 2; б) -2; 2; в) $-\sqrt{2}$,

$\sqrt{2}$; г) $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$. **30.7.** а) $[-5; 5]$; б) $[-13; 13]$; в) $[-25; 25]$; г) $[-17; 17]$. **30.8.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **30.10.** а) $-\sqrt{5}-1$, $\sqrt{5}-1$; б) 4; 30; в) -10; 0; г) 15; 40. **30.11.** а) -4; 4; б) -3; 3. **30.12.** а) 7; б) -42. **30.13.** а) 16; б) 11,5. **30.14.** а) -23; б) 15. **30.15.** а) $2\pi k$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; б) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$; в) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $\pi+2\pi k$; г) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\pi+2\pi k$. **30.16.** а) $(-1)^k\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; б) $(-1)^k\frac{\pi}{15}+$ $+\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}$; в) $\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, $-2\pi+4\pi k$; г) $6\pi k$, $\frac{3\pi}{2}+6\pi k$. **30.17.** а) $\frac{\pi}{2}+$ $+\arccos\frac{4}{5}+2\pi k$; б) $(-1)^k\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi k}{2}$; в) $\pi+\arccos\frac{5}{13}+2\pi k$; г) $\pm\frac{2\pi}{3}-2\arccos\frac{5}{13}+4\pi k$. **30.18.** а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{5}$; б) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $\frac{2\pi}{3}+\pi k$; в) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}$; г) $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}$. **30.19.** а) $-\frac{\pi}{66}+\frac{\pi k}{11}$, $\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{6}$; б) $\frac{1}{4}\arccos\frac{5}{13}+\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}+\pi k$. **30.20.** а) $\frac{7\pi}{6}+2\pi k$; б) $2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **30.21.** а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$. **30.22.** а) $2\pi k<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; б) $\arcsin\frac{4}{5}-$ $-\frac{7\pi}{6}+2\pi k<x<\arcsin\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **30.23.** а) $a>7$; $a<-6$; б) $a>\sqrt{6}$; $a<-\sqrt{6}$. **30.26.** а) $a>\frac{1}{2}$; $a<-\frac{1}{2}$; б) $a\leqslant 2$. **30.27.** 6. **30.28.** $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$.

§ 31

31.1. а) $-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{4}-2+\pi n$, $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi n}{2}$. **31.2.** а) $\frac{\pi}{10}(1+2n)$; б) $\frac{\pi n}{5}$. **31.3.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **31.4.** а) $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}n$, $\frac{\pi}{13}+\frac{2\pi}{13}n$; б) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$. **31.5.** а) $-\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}+\pi n$; б) $-\mathrm{arctg}\,2{,}5+\pi n$. **31.6.** а) $\frac{\pi}{8}(1+2n)$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{8}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$. **31.7.** а) $\frac{\pi}{6}(1+2n)$, $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}(1+2n)$; $\frac{\pi}{10}(1+2n)$. **31.8.** $45°+180°n$. **31.9.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. **31.10.** а) πn; $\pm\frac{1}{2}\arccos(-0{,}7)+\pi n$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{7}+\pi n$. **31.11.** а) $\mathrm{arctg}\,2{,}5+2\pi n$, $\pi-\mathrm{arctg}\,0{,}5+2\pi n$,

$\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + 2\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{5}{8} + 2\pi n$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}6 + 2\pi n$, $\pi - \operatorname{arctg} 2{,}2 + 2\pi n$, $\pi + \operatorname{arctg} 11 + 2\pi n$, $-\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$. **31.12.** а) $\pi + 2\pi n$, $(-1)^n\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $2\pi + 4\pi n$, $(-1)^n\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$. **31.13.** $\varnothing$. **31.14.** а) $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi n$. **31.15.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **31.16.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\pi}{2}n$. **31.17.** а) $\pi + 2\pi n$, $2\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 2\pi n$. **31.18.** а) $\operatorname{arctg}\frac{3 \pm \sqrt{6}}{3} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2}n$, $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2}n$. **31.19.** $\frac{\pi}{4} + \pi n$. **31.20.** а) $2\pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **31.21.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\pi + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{10} + 2\pi n$. **31.22.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4} + 2\pi n$. **31.23.** а) $3\pi n$, $\pm\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi n$. **31.24.** а) $\frac{\pi}{72} + \frac{\pi n}{9}$, $-\frac{\pi}{32} + \frac{\pi n}{4}$. **31.25.** а) $-1 - \arccos\frac{3}{5} + 2\pi n$; б) $1{,}5 + \frac{1}{2}\arccos\frac{8}{17} \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$. **31.26.** а) $-\frac{\varphi}{6} - \frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{3}n$, $\frac{\varphi}{8} + \frac{5\pi}{48} + \frac{\pi}{4}n$, где $\varphi = \arccos\frac{3}{5}$. **31.27.** $-\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$. **31.28.** 7. **31.29.** 6. **31.30.** $\varnothing$. **31.31.** $\varnothing$. **31.32.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} + \pi n$. **31.33.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$; $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. **31.34.** а) $\frac{1}{12}\operatorname{arctg} 8 + \frac{\pi n}{12}$; б) $\frac{\pi}{32} + \frac{\pi n}{16}$. **31.35.** а) $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi n$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi n$. **31.36.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **31.37.** $\frac{\pi}{6} + \pi n$. **31.38.** πn. **31.39.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **31.40.** $\pm\frac{\pi}{2}$; ±3. **31.41.** а) $0, \pm1, \pm2, \pm\frac{5}{2}$; б) $\pm1, \pm3, \pm\frac{7}{2}$. **31.42.** а) $-1, 5, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$; б) $-2, 0, 1, -\frac{\pi}{3}$. **31.43.** $2\pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$. **31.44.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{18} + \pi n$, $(-1)^n\frac{5\pi}{18} + \pi n$, $(-1)^n\frac{7\pi}{18} + \pi n$, πn; б) $(-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$,

$\frac{5\pi}{12} + 2\pi n$. **31.45.** а) $\pm\frac{\sqrt{11}}{6}$, $\pm\frac{\sqrt{155}}{6}$, $\pm\frac{\sqrt{179}}{6}$; б) $\pm\frac{\sqrt{47}}{3}$, $\pm\frac{\sqrt{59}}{3}$. **31.46.** $2 \pm \sqrt{3}$.

31.47. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n$; $\frac{11\pi}{12} + 2\pi n$. **31.48.** а) $2\pi n$, $-\mathrm{arctg}\,6 + 2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\pi + \mathrm{arctg}\frac{1}{4} + 2\pi n$.

§ 32

32.6. а) i; б) $-32i$; в) 2; г) 0. **32.8.** а) $-2i$; б) $\sqrt{2i}$; в) $18i$; г) 0. **32.9.** а) i, 1, $-i$, -1, i, 1, $-i$; б) $-i$; в) 1; г) 0. **32.11.** а) $z_1 + z_2 = 2 - i$, $z_1 - z_2 = 3i$; б) $z_1 + z_2 = -1 + 3i$, $z_1 - z_2 = 5 - i$; в) $z_1 + z_2 = 15$, $z_1 - z_2 = -15 - 2i$; г) $z_1 + z_2 = -34 - 14i$, $z_1 - z_2 = -2 + 16i$. **32.12.** а) $(4 - n) + (n - 3)i$; б) $-11 + 12i$; в) $-130 + 150i$; г) $-651 + 682i$. **32.14.** а) 0,5; б) 0,1; в) $-0,1$; г) таких a не существует. **32.15.** а) $1 + 3i$; б) $1 - 14i$; в) $1 - 5i$; г) $34 - 21i$. **32.16.** а) -2; б) 0; в) 0,125; г) таких a не существует. **32.17.** а) 1; б) $\frac{13}{6}$; в) 1,5; г) $\frac{1}{12}$. **32.18.** а) $a = 3$, $b = 2$; б) $a = 3$, $b = 2$; в) $a = 4$, $b = -1$; г) $a = 2$, $b = 1$. **32.23.** а) 2; б) $16i$; в) на 1-м, 5-м, 9-м, ... местах; г) на 3-м, 7-м, 11-м, ... местах. **32.24.** а) $-i$; б) $-1 - i$; в) $-i$; г) i. **32.25.** а) -2; б) 0; в) $-2i$; г) 0. **32.26.** а) $-0,1i$; б) $0,4 + 0,3i$. **32.27.** а) $-1 - i$; б) $-i$; в) $0,5 + 0,5i$; г) $i - 1$. **32.28.** а) $a = -0,25$, $b = 0$; б) $a = -1$, $b = 0$; в) $a = 0,2$, $b = -0,48$; г) $a = 0,56$, $b = -0,24$. **32.29.** а) $1 + 2i$; б) 1; в) $3i$; г) $2 + 2i$. **32.30.** б) -44. **32.31.** а) 0; б) 1; $-\frac{4}{5}$. **32.32.** а) $\bar{z} = -i$; $z\bar{z} = 1$; $\bar{z} : z = -1$; б) $\bar{z} = i$; $z\bar{z} = 1$; $\bar{z} : z = -1$; в) $\bar{z} = 3 + 7i$; $z\bar{z} = 58$; $\bar{z} : z = \frac{-20 + 21i}{29}$; г) $\bar{z} = -5 + 6i$; $z\bar{z} = 61$; $\bar{z} : z = \frac{-11 - 60i}{61}$. **32.33.** а) $z = -2i$; $z\bar{z} = 4$; $z : \bar{z} = -1$; б) $z = 3i$; $z\bar{z} = 9$; $z : \bar{z} = -1$; в) $z = 1 + i$; $z\bar{z} = 2$; $z : \bar{z} = i$; г) $z = -1 - 3i$; $z\bar{z} = 10$; $z : \bar{z} = -0,8 + 0,6i$.

32.34. а) $\frac{5 - 3i}{17}$; б) $\frac{16 - 30i}{289}$; в) $\frac{5 + 3i}{17}$; г) $\frac{2 + 8i}{17}$. **32.35.** а) $\frac{17 + 7i}{13}$; б) $\frac{-55 + 37i}{13}$; в) $\frac{1 + 5i}{2}$; г) $\frac{1 - 15i}{4}$. **32.36.** а) $z_1 = i$; $z_2 = 3$; б) $z_1 = 1$; $z_2 = 2i$; в) $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 3 + 2i$; г) $z_1 = 2 - i$; $z_2 = 2 + 3i$. **32.37.** а) 2; -2; б) $\sqrt{5} + i$; $-\sqrt{5} + i$; в) таких корней нет; г) $\frac{3 + i}{\sqrt{2}}$. **32.38.** а) -2; б) $-1 - i$; в) 0; г) $\frac{1 - \sqrt{2} + i}{\sqrt{2}}$.

§ 33

33.8. б) $45°$; в) $3 \cdot 3 = 9$; г) z^3 и z^7. **33.15.** б) 0,6; г) −0,5. **33.16.** б) $\frac{5}{3}$; г) −2. **33.17.** б) $y = 0{,}5(9 - x)$; в) $-5 + 7i$; г) $-7 + 8i$. **33.18.** б) $y = x^2 - 3x + 2$; в) 15; г) 13. **33.19.** б) $y = \frac{3}{x - 1}$; в) $z_6 = 7 + 0{,}5i$; г) $z_2 = 3 + 1{,}5i$. **33.20.** а) ± 1; б) нет решений; в) 1; г) −1. **33.21.** а) $\pm i$; б) нет решений; в) i; г) $-i$. **33.22.** а) 0; б) 0; в) 0; г) любое действительное или чисто мнимое число. **33.23.** а) $2 - 0{,}5i$; б) $7 - i$; в) $3 + 7i$; г) $5 - 2i$.

§ 34

34.3. а) $|z_1| = 13$, $|z_2| = 5$; б) $z_1 z_2 = 56 + 33i$, $|z_1 z_2| = 65$; в) $\frac{1}{z_1} = \frac{12 + 5i}{169}$; г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{16 - 63i}{25}$. **34.5.** а) 6; б) $2\sqrt{5}$; в) 7; г) $5\sqrt{2}$. **34.8.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 4. **34.9.** а) 1; б) 3; в) 3; г) 4. **34.11.** а) $z = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. б) $z = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; в) $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$; г) $z = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$.

34.12. а); б) $z = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $z = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$; г) $z = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$. **34.13.** а) $z = \cos(-0{,}8\pi) + i\sin(-0{,}8\pi)$; б) $z = \cos(-0{,}3\pi) + i\sin(-0{,}3\pi)$; в) $z = \cos\pi + i\sin\pi$; г) $z = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

34.15. а) $-\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{2}$. **34.21.** а) $5(\cos 0 + i\sin 0)$; б) $3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$; в) $8(\cos\pi + i\sin\pi)$; г) $0{,}5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

34.22. а) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; в) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; г) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

34.23. а) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; б) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; в) $6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$; г) $4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

34.24. а) $8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; б) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; г) $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

34.25. а) $5(\cos(-\arccos 0{,}6) + i\sin(-\arccos 0{,}6))$;

б) $13\left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right) + i\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)\right)$;

в) $10(\cos(\arccos 0{,}6) + i\sin(\arccos 0{,}6))$;

г) $17\left(\cos\left(-\arccos\left(\frac{15}{17}\right)\right) + i\sin\left(-\arccos\left(\frac{15}{17}\right)\right)\right)$.

34.26. а) $\cos(-55°) + i\sin(-55°)$; б) $\cos 113° + i\sin 113°$; в) $\cos 130° + i\sin 130°$; г) $\cos 110° + i\sin 110°$. **34.27.** а) $2\sin 50°(\cos 40° + i\sin 40°)$; б) $2\sin\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)$; в) $2\sin\frac{3\pi}{11}\left(\cos\frac{3\pi}{11} + i\sin\frac{3\pi}{11}\right)$;

г) $2\sin 125°(\cos(-35°) + i\sin(-35°))$. **34.28.** а) $2{,}5(-\sqrt{3} + i)$; б) $0{,}5(1 + i\sqrt{3})$;

в) $2{,}5(-1 + i\sqrt{3})$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$. **34.29.** а) $2i$; б) $-5i\sqrt{2}$; в) $3(\sqrt{3} + i)$; г) $4i\sqrt{3}$.

34.30. а) $-\sqrt{3} + i$; б) $-10i$; в) $40i$; г) $\sqrt{3} + i$. **34.33.** а) π; б) $-\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{2}$.

34.34. а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; г) π. **34.35.** а) $-\frac{5\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 0. **34.36.** а) $-\frac{\pi}{2}$;

б) π; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{5\pi}{6}$. **34.40.** а) 3; б) 5; в) 8; г) 10. **34.41.** а) $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$; б) $1 + i\sqrt{3}$.

34.42. а) Круг радиуса 1 с центром в $3 + 4i$, $|z| = 6$ — наибольшее значение; б) круг радиуса 1 с центром в $4 - 3i$, $|z| = 4$ — наименьшее значение.

§ 35

35.1. а) 4; б) $a < 4$; в) $a > 4$; г) $a < 0$. **35.2.** а) $|a| \geqslant 6$; б) $-6 < a < 6$; в) $a \geqslant 6$; г) $-10 < a < -6$. **35.3.** а) $a = 1$ или $a = 0$; б) $a < 0$; в) $a < 0$; г) $a = -16 - 8\sqrt{5}$. **35.4.** а) $\pm 12i$; б) $\pm 2i$; в) $\pm 21i$; г) $\pm 32i$. **35.5.** а) $z^2 + 1 = 0$; б) $z^2 - 14z + 53 = 0$; в) $z^2 + 49 = 0$; г) $z^2 - 2z + 2 = 0$. **35.6.** а) $z^2 + 4 = 0$; б) $z^2 - 2z + 10 = 0$; в) $64z^2 + 1 = 0$; г) $z^2 + 648^2 = 0$. **35.8.** а) $0{,}5 \pm 1{,}5i$; б) $-1{,}5 \pm 2{,}5i$; в) $2{,}5 \pm 0{,}5i$; г) $-5{,}5 \pm 2{,}5i$. **35.9.** а) 2; б) 10; в) ± 4; г) -7; 3. **35.10.** а) $a = -4$; б) $a = 4$; в) $a = \pm 3$; г) $a = -4$ или $a = 2$. **35.11.** а) ± 2; б) $\pm 2i$; в) $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; г) $\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}(1 - i)$. **35.12.** а) $\pm(2 - i)$; б) $\pm(2 + i)$; в) $\pm\frac{3 - i}{\sqrt{2}}$;

г) $\pm\dfrac{5+i}{\sqrt{2}}$. **35.13.** а) $\pm(4+i)$; б) $\pm(4-i)$; в) $\pm\dfrac{7-i}{\sqrt{2}}$; г) $\pm\dfrac{9+i}{\sqrt{2}}$. **35.17.** а) $z^2 - 3z + (3+i) = 0$; б) $z^2 + (i-5)z + (8-i) = 0$; в) $z^2 - 8z + (11+12i) = 0$; г) $z^2 + (i-9)z + (40-9i) = 0$. **35.18.** а) $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$; б) $z_1 = 0$, $z_2 = -4i$; в) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + i$; г) $z_1 = 7 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$. **35.19.** а) $1 + 2i$; б) $30i$; в) $1 + 6i$; г) $-89 + 120i$. **35.20.** а) $a = 4i$; б) $a = -4{,}5i$; в) $a = -13 - 13i$; г) $a = \dfrac{40 - 21i}{13}$.

§ 36

36.2. а) Нет; б) нет; в) да; г) да. **36.3.** а) z, z^2, z^3, z^4, z^5; б) z, z^2, z^8, z^9, z^{10}; в) z, z^2; г) $z^3, z^4, z^5, z^8, z^9, z^{10}$. **36.4.** а) z^3, z^4; б) $z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7, z^8$; в) z, z^2, z^{10}; г) z^9, z^{10}. **36.5.** а) z^1, z^2, z^3, z^4, z^5; б) z, z^2, z^9, z^{10}; в) $z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7$; г) $z^5, z^6, z^7, z^8, z^9, z^{10}$. **36.6.** а) z^3, z^4; б) z, z^2; в) z, z^2, z^9, z^{10}; г) z^{10}. **36.8.** а) -4; б) $-8i$; в) $-32i$; г) -1024. **36.9.** а) -8; б) $16\left(1 - i\sqrt{3}\right)$; в) $-64\left(\sqrt{3} + i\right)$; г) $-512i$. **36.10.** а) $-i$; б) $0{,}5\left(\sqrt{3} + i\right)$; в) $-0{,}5\left(1 + i\sqrt{3}\right)$; г) 1. **36.11.** а) $-\dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{1}{8}i$; в) $\dfrac{1}{32}i$; г) $-\dfrac{1}{1024}$. **36.12.** а) $-0{,}125$; б) $2^{-6}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$; в) $2^{-8}\left(-\sqrt{3} + i\right)$; г) $2^{-9}i$. **36.13.** а) 128; б) $-i$; в) $-32\sqrt{3}$; г) 1. **36.14.** а) $-64i$; б) i. **36.15.** а) 3; б) 8; в) 10; г) 10. **36.16.** а) 17; б) 34; в) 100; г) 200. **36.17.** а) 6; б) 11; в) 20; г) 0. **36.18.** а) 101; б) 200; в) 4; г) 0. **36.19.** а) z^4, z^8, z^{12}; б) z^8, z^9; в) $z^3, z^4, z^5, z^{11}, z^{12}$; г) z^9, z^{10}, z^{11}. **36.20.** а) $4, 2\left(-1 + \sqrt{3}i\right), -2\left(1 + i\sqrt{3}\right)$; б) $1{,}5\left(1 + i\sqrt{3}\right), -3, 1{,}5\left(1 - i\sqrt{3}\right)$; в) $2{,}5\left(\sqrt{3} + i\right), 2{,}5\left(-\sqrt{3} + i\right), -5i$; г) $4\left(\sqrt{3} - i\right), -4\left(\sqrt{3} + i\right), 8i$. **36.23.** а) $-i, 0{,}5\left(\pm\sqrt{3} + i\right), -2, 1 \pm i\sqrt{3}$; б) $\pm\sqrt{2}(1 + i), \pm i\sqrt{2}$. **36.24.** а), б) 1.

§ 37

37.12. а) 1,5; 3; 4,5; 6; 7,5; 9; $a_n = 1{,}5n$; б) -1; 1; -1; 1; -1; $a_n = (-1)^n$; в) 8; 4; $2\dfrac{2}{3}$; 2; 1,6; $a_n = \dfrac{8}{n}$; г) 1; -2; 3; -4; 5; $a_n = (-1)^{n+1}n$. **37.19.** а) 7, 12, 17, 22, 27; б) 102. **37.20.** а) 1027; б) $3^5, 3^8, 3^{37}, 3^{2n}, 3^{2n+1}, 3^{2n-3}$. **37.21.** а) $a_n = 4n - 2$; $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 4$; б) $a_n = 13n + 5$; $a_1 = 18$; $a_n = a_{n-1} + 13$; в) $a_n = 21n$; $a_1 = 21$, $a_n = a_{n-1} + 21$; г) $a_n = 30n$; $a_1 = 30$, $a_n = a_{n-1} + 30$. **37.22.** а) $a_n = -n$; б) $a_n = 6n$; в) $a_n = 11 - n$; г) $a_n = 4n$. **37.23.** а) 3^n; б) $(n + 2)^2$; в) n^3; г) $n^3 + 1$. **37.24.** а) $\dfrac{1}{2^{n-1}}$; б) $\dfrac{2n+1}{2n+2}$; в) $\dfrac{1}{n^3}$; г) $\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. **37.25.** а) $a_n = \dfrac{3^n}{2^{2n}}$; б) $a_n = \dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$; в) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n^2}{\sqrt{n(n+1)}}$;

г) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(5n-1)}{n(n+1)(n+2)}$. **37.27.** а) 2; б) 5; в) 13; г) 45. **37.28.** а) $P_n = 4\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$; 4; $4\sqrt{2}$; 8; $8\sqrt{2}$; 16; б) $S_n = \left(\sqrt{2}\right)^{2n-2}$; 1; 2; 4; 8; 16; в) 32; г) 65536. **37.29.** а) 1; б) 4. **37.30.** а) 6; б) 5. **37.31.** а) 11; б) 4. **37.32.** а) 6; б) 124; в) 6; г) 55. **37.33.** а) −6; −4; б) $-22\dfrac{5}{8}$; −181; в) −1; г) нет. **37.34.** а) 3; б) 10; в) 4; г) 29. **37.35.** а) −428; б) −128. **37.36.** а) 19; б) 16. **37.37.** а) 2; б) 62; в) 15; г) 1. **37.38.** а) 17; б) −81; в) 19; г) 1. **37.39.** а) $y_2 = -5$; б) $y_3 = -3$; в) $y_2 = -3$; г) $y_1 = -\dfrac{4}{5}$. **37.40.** а) $y_3 = 13$; б) $y_3 = 3$; в) $y_1 = 5$; г) $y_1 = \dfrac{4}{5}$. **37.41.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **37.42.** а) Да; б) да; в) да; г) да. **37.43.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **37.44.** а) Да; б) да; в) да; г) да. **37.45.** а) $p \leqslant 1$; б) p — любое. **37.46.** а) $p \leqslant -2$; б) $-3 \leqslant p \leqslant 3$. **37.47.** а) $p \leqslant 0$; б) $p \geqslant -1$. **37.50.** а) Убывает; б) возрастает; в) убывает; г) возрастает. **37.51.** а) Убывает; б) возрастает; в) возрастает; г) убывает. **37.54.** а) Возрастает; б) убывает; в) убывает; г) возрастает. **37.55.** а) $p > 0$; б) $p > 1$; в) $p < 0$; г) $p < -2$. **37.56.** а) $p > 0$; б) $p < 0$; в) $p < 0$; г) $p < 0$. **37.57.** а), б) Ограничена снизу, возрастает; в) ограничена, убывает; г) ограничена, убывает. **37.58.** а) Возрастает, ограничена; б) убывает, ограничена. **37.59.** а) $y_n = n^2$; б) $y_n = n^2 + 5$; в) $y_n = \dfrac{n^2}{n^2-5}$; г) $y_n = -n$.

§ 38

38.4. а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **38.5.** а) 6; б) 3; в) 15; г) 31. **38.6.** а) 4; б) 7; в) 8; г) 5. **38.7.** а) $y = 0$; б) $y = 0$; в) $y = 0$; г) $y = 0$. **38.8.** а) $y = -1$; б) $y = 2$; в) $y = 2$; г) $y = -3$. **38.9.** а) $y = 2$; в) $y = -3$. **38.10.** а) Нет; б) нет; в) нет; г) нет. **38.14.** а) 0; б) 6; в) 0; г) −4. **38.15.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0. **38.16.** а) 5; б) 7; в) 3; г) $\dfrac{2}{3}$. **38.17.** а) 2; б) 1; в) −1; г) −2. **38.18.** а) 2; б) 12; в) 6; г) −2. **38.19.** а) 7; б) 0; в) 1; г) 0. **38.20.** а) 1; б) $\dfrac{1}{2}$. **38.21.** а) $-\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{1}{2}$. **38.27.** а) $2\dfrac{2}{9}$; б) −0,128; в) −0,022; г) $3\dfrac{1}{9}$. **38.28.** а) 12,5; б) $-8\dfrac{2}{3}$; в) 22,5; г) 36. **38.29.** а) $41\dfrac{2}{3}$; б) $\dfrac{2}{27}$. **38.30.** а) $b_1 = 12$; $q = 0{,}5$; б) $\dfrac{1}{625}$. **38.31.** а) $b_1 = 12$; $q = \dfrac{1}{3}$; б) $1\dfrac{1}{3}$. **38.32.** а) 4; б) $57\dfrac{1}{6}$; в) 0,9; г) 156,25. **38.33.** а) −5,4; б) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$; в) $38\dfrac{1}{9}$; г) $4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$. **38.34.** а) 111; б) $2500\dfrac{2}{7}$; в) 396,25;

г) $1717\frac{1}{9}$. **38.35.** а) $\frac{\sin x}{1-\sin x}$; б) $\frac{\cos x}{1+\cos x}$; в) $\operatorname{ctg}^2 x$; г) $\frac{1}{1+\sin^3 x}$.

38.36. а) 0,8; б) 0,3. **38.37.** а) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; $-\frac{7}{9}$. **38.38.** а) $(-1)^k \arcsin\frac{5}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; б) нет корней; в) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; г) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

§ 39

39.3. а) −10; б) −12; в) 4; г) −54. **39.4.** а) 0,2; б) 0; в) 1,2; г) −1. **39.13.** а) 0; б) −2; в) 0; г) 6. **39.14.** а) 1; б) 1,5; в) 1; г) $1\frac{1}{6}$. **39.15.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0. **39.16.** а) $-\frac{1}{5}$; б) 1; в) $-\frac{2}{3}$; г) 0. **39.17.** а) 4; б) 2; в) 3; г) 2. **39.24.** а) 3; б) $\frac{1}{4}$; в) 1; г) $\frac{7}{9}$. **39.25.** а) 0; б) 0,2; в) 0,5; г) −0,2. **39.26.** а) $\frac{4}{3}\pi$; б) 1; в) $\frac{\pi}{2}$; г) −2. **39.27.** а) 0; б) −1; в) 3; г) 0,2. **39.28.** а) 2; б) −4; в) 10; г) $-\frac{1}{6}$. **39.29.** а) 4; б) $\frac{1}{7}$; в) $-\frac{1}{4}$; г) 7. **39.30.** а) $\frac{1}{12}$; б) 1,5; в) $\frac{1}{27}$; г) $\frac{1}{6}$. **39.31.** а) $\frac{1}{18}$; б) 0; в) 12; г) 0. **39.32.** а) 1; б) 0; в) 1; г) 0. **39.33.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$. **39.37.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 0,5; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) −0,5. **39.38.** а) 0,2; б) −0,1; в) 0,1; г) 0,05. **39.40.** а) 0,5; б) −0,66; в) 1,5; г) 0,74. **39.41.** а) $3\Delta x$; б) $-2x\Delta x - (\Delta x)^2$; в) $-2\Delta x$; г) $4x\Delta x + 2(\Delta x)^2$. **39.42.** а) 0,1; б) −0,1; в) 0,5; г) −0,5. **39.44.** а) k; б) $2ax + a\Delta x$; в) $\frac{-1}{x(x+\Delta x)}$; г) $\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$. **39.45.** а) k; б) $2ax$; в) $-\frac{1}{x^2}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

§ 40

40.4. а) 4; б) $2t - 1$; в) 3; г) $2t - 2$. **40.9.** а) $2x + 2$; б) $-\frac{1}{x^2}$; в) $6x - 4$; г) $-\frac{4}{x^2}$. **40.10.** а) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{-2}{x^3}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $3x^2$. **40.11.** а) Не существует; б) 0; в) не существует; г) 2. **40.12.** а) Не существует; б) 0; в) 0; г) 0. **40.14.** а) 4; б) −1; в) −4; г) −4. **40.15.** а) 2 м/с, 2 м/с^2; б) 4,2 м/с, 2 м/с^2; в) 4 м/с; 2 м/с^2; г) 7 м/с, 2 м/с^2. **40.16.** а) 3 м/с, 2 м/с^2; б) 5,2 м/с; 2 м/с^2; в) 5 м/с, 2 м/с^2; г) 8 м/с, 2 м/с^2. **40.17.** а) −2,25; б) 1,5.

§ 41

41.15. а) $2 + \frac{3}{x^2}$; б) $42 + \frac{1}{x^2}$; в) $40 + \frac{2}{x^2}$; г) $27 + \frac{2}{x^2}$. **41.16.** а) $3x^2 \cdot \operatorname{tg} x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$; б) $-\cos x - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$; в) $-\frac{\operatorname{ctg} x}{x^2} - \frac{1}{x \sin^2 x}$; г) $\sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. **41.17.** а) $3x^2$; б) $3x^2$; в) $3x^2$; г) $3x^2$. **41.18.** а) $\frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$; б) $-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$; в) $\frac{2x(3-2x)}{(3-4x)^2}$; г) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. **41.19.** а) $\frac{3(9-2x)}{2\sqrt{x}(2x+9)^2}$; б) $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$; в) $-\frac{3x+8}{\sqrt{x}(8-3x)^2}$; г) $\frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$. **41.20.** а) $\frac{6x^9+9}{x^4}$; б) $\frac{5x^{14}(x^{10}+3)}{(x^{10}+1)^2}$; в) $-\frac{4x^5+5x^4+1}{(x^5-1)^2}$; г) $\frac{x^{12}(9x^4-26)}{(x^4-2)^2}$. **41.21.** а) $-\sin x$; б) $\cos x$; в) 0; г) $-\frac{1}{2}\cos x$. **41.22.** а) $\cos x$; б) $\cos x$; в) $-\sin x$; г) $-\sin x$. **41.29.** а) $-\frac{4}{\pi^2}$; б) -2; в) $\frac{1}{\pi^2}$; г) 2. **41.32.** а) $x < -1$ и $x > 1$; б) $0 < x < 1$; в) $x > 0$; г) $2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n$. **41.34.** а) 14; б) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; в) 72; г) $\sqrt{2} - 4$. **41.35.** а) 0; б) 0. **41.36.** а) -1; 1; не существует; б) не существует; не существует; 0. **41.39.** а) $\frac{1}{16}$; б) $\frac{1}{4}$. **41.40.** а) $\pm\frac{3}{4}\pi + 2\pi k$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **41.43.** а) π; б) 0; в) $2\frac{1}{3}$; г) $-\frac{5+3\sqrt{3}}{6}$. **41.44.** а) $x = 2$; б) $x = 0$; $x = -4$. **41.45.** а) $x < 0$; $x > 2$; б) $0 < x < 4$; в) $x < 0$; $0 < x < \frac{3}{4}$; г) $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n$. **41.46.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$; б) $-3 < x < -1$; $1 < x < 3$; в) $-\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{9} + \pi k < x < \frac{1}{2}\arccos\frac{7}{9} + \pi k$; г) $x < 0$, $0 < x < \frac{1}{4}$. **41.47.** а) $a = \frac{7}{8}$; б) $a = 1$, $a = -\frac{1}{3}$. **41.48.** а) $\frac{1}{49}$; б) $\frac{1}{16}$. **41.49.** а) $x > \frac{3}{4}$; б) $-\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}$; $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$. **41.50.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3}{4}\pi + \pi k$; б) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. **41.51.** а) $-\frac{3}{4} < x < 0$, $x > 0$; б) $x < \frac{2}{5}$; $x > \frac{2}{5}$. **41.52.** а) $-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n$; б) $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$. **41.53.** а) 1; 16; б) $\sqrt[3]{4}$. **41.54.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.

41.55. а) $x < 0$; $x > 3$; б) $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n$.

41.56. а); б) Таких значений нет. **41.57.** а) $\frac{\pi}{6} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + \pi k$;

б) $2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + \pi n$, $-\pi + 2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi k$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $k = 0, -1, -2, -3, \ldots$. **41.59.** а) $x^3 + x^2$; б) $\frac{7}{x}$; в) $x^5 - x$; г) $9\sqrt{x}$. **41.60.** а) $y = \frac{x^3}{3} - 3x$;

б) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x, \text{ если } x < -2{,}5, \\ \frac{1}{7}x^2 + \frac{12}{7}x, \text{ если } -2{,}5 < x < 1, \text{ (вершины ломаной не учтены).} \\ \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x, \text{ если } x > 1 \end{cases}$

41.61. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, πn; б) $\frac{1}{2}$. **41.62.** а) $a + b = -2$; б) $a = 0$, $b = -2$.

41.63. а) $a + b = -1$; б) $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{5}{4}$. **41.64.** а) $12x^2$; б) $20x^3$; в) $-\sin x$; г) $-2\cos x$. **41.65.** а) 12; б) 0; в) -4; г) -1. **41.66.** а) 9 м/с²; б) 9 Н. **41.67.** а) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **41.68.** а) $y'' = 2\cos x - x\sin x$;

б) $y'' = -a\sin x - b\cos x$. **41.69.** а) $y = \operatorname{tg} 15^\circ\left(50 - \frac{x^2}{200}\right)$. **41.70.** а) $\pm\sqrt{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\pm\sqrt{2}$, ± 1.

§ 42

42.4. а) $-2\sin 2x$; б) $2\cos 2x$; в) $-6\sin 6x$; г) 0. **42.5.** а) $8\cos 8x$; б) $-10\sin 10x$; в) $4\cos 4x$; г) $-\frac{1}{6}\sin\frac{x}{6}$. **42.6.** а) $-15x^2(1 - x^3)^4$;

б) $\frac{3x^2 + 6x - 2}{2\sqrt{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}}$; в) $\frac{14 - 4x}{(x^2 - 7x + 8)^3}$; г) $\frac{6x}{(x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 5} \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$.

42.7. а) $3\sin^2 x \cos x$; б) $-\frac{1}{2\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$; в) $\frac{5\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}$; г) $\frac{1 + 3x^2}{\cos^2(x + x^3)}$.

42.8. а) $\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} - 3\cos^2 x \sin x$; б) $\frac{x^2 + 1 - 2x\sin 2x}{2(x^2 + 1)^2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos^2 x}$; в) $\sin 2x\cos\sqrt{x} - \frac{\sin^2 x \sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; г) $-\frac{x\sqrt{\operatorname{tg} x} + 6\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{2x^4\sin^2 x}$. **42.9.** а) $3 \cdot 7^7$; б) $-1\frac{1}{8}$; в) -35;

г) 0,7. **42.10.** а) 2; б) 4; в) -2; г) 3. **42.11.** а) -7; б) $\frac{3}{16}$; в) $-1\frac{1}{4}$; г) $\frac{3}{16}$.

42.12. а) 6; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; в) 0; г) -4. **42.13.** а) 10; б) 1,75; в) $-\frac{48}{361}$; г) $-\frac{5}{8}$.

42.14. а) 0; б) 12; в) $-\sqrt{3}$; г) $-\frac{4}{9}$. **42.15.** а) 2; б) $-\frac{1}{2}$; в) 5; г) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **42.16.** а) 4π; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$; в) 0; г) 0. **42.17.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{4}+\pi k$; б) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}$; $(-1)^{k+1}\frac{1}{6}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{\pi k}{6}$; в) $\frac{\pi k}{2}$; г) таких значений нет. **42.18.** а) Таких значений нет; б) $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{\pi}{4}+\pi n$. **42.19.** а) −8; б) $-1\frac{1}{8}$; в) −0,5; г) 1. **42.20.** а) $\pm\frac{3}{8}\pi+\pi n$; б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. **42.21.** а) $x=\pi n$; б) $\frac{\pi}{2}n$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$. **42.22.** а) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$. **42.23.** а) $a=2$, $b=0$; б) $a=2{,}5$, $b=0{,}75$. **42.24.** а) $\frac{\pi n}{2}$; б) πn; в) $\frac{\pi n}{2}$; г) $\frac{\pi n}{2}$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$. **42.25.** а) $\frac{1}{3}$, $x\geqslant\frac{17}{42}$; б) $-9{,}1\leqslant x\leqslant -1{,}5$. **42.26.** а) $\frac{1}{2}<x<5\frac{1}{6}$; б) $x<-\frac{4}{5}$, $x>\frac{4}{3}$. **42.28.** а) $\frac{12-\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$; б) 9. **42.29.** а) $2\frac{2}{3}$; б) $\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$. **42.30.** а) $(2x-1)^3+C$; б) $(4-5x)^4+C$, где C — любое число. **42.31.** а) $-\frac{1}{2x+3}+C$; б) $\sqrt{5x-7}+C$, где C — любое число. **42.32.** а) $-\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+C$; б) $\frac{4}{5}\operatorname{tg}(5x-1)+C$, где C — любое число. **42.33.** а) $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$; б) $\frac{2x}{1+x^4}$; в) $\frac{-3(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$. **42.34.** а) $-\frac{3\pi^2}{4}$; б) 1; в) 1; г) 2. **42.35.** а) −3; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) −2; г) $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. **42.36.** а) 3; б) $\frac{\pi}{2}$. **42.37.** а) 0; б) нет таких значений. **42.38.** а) $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$; б) $0<x<1$.

§ 43

43.6. а) 1; б) −0,5; в) −8; г) 0. **43.7.** а) 27; б) 0; в) 6; г) −1. **43.8.** а) −4; б) −1; в) −103,2; г) 1. **43.9.** а) −4, 0, 6; б) 2, 0, 4; в) −3, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$, нет, 1. **43.10.** а) −5, 0, 7; б) −2, 0, 0. **43.11.** а) −5, 0, 3; б) −6, 0, −2. **43.12.** а) (1; 15); в) (0; 0), $\left(\frac{4}{3};\ \frac{4}{27}\right)$; г) $\left(\frac{2\sqrt{7}}{7};\ \frac{8\sqrt{7}}{7}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7};\ \frac{8\sqrt{7}}{7}\right)$. **43.13.** а) (0; 0); б) (0; −1); в) $\left(-1;\ 3-\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(1;\ 3+\frac{\pi}{4}\right)$. **43.21.** а) 0; б) $\pi-\operatorname{arctg}7$; в) $\operatorname{arctg}2$; г) касательной не существует. **43.23.** а) $y=7x-10$;

б) $y=-3x-10$; в) $y=5x-17$; г) $y=-x+\frac{5}{4}$. **43.24.** а) $y=3x-4$; б) $y=-x+4$. **43.25.** а) $y=1$; б) $y=\frac{\pi}{2}-2x$; в) $y=1$; г) $y=\frac{2}{3}x$. **43.26.** а) $y=\frac{\pi}{2}-x$; б) $y=-x$; в) $y=2{,}5x+0{,}5+\frac{\pi}{2}$; г) $y=x-5\operatorname{arctg}2$. **43.27.** а) $y=\frac{3\sqrt{3}}{4}x+$ $+\frac{1}{8}-\frac{\pi\sqrt{3}}{16}$; б) $y=\frac{6}{\pi}x+2-\frac{2}{\pi}$; в) $y=-2x+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; г) $y=\pi$. **43.28.** а) $y=-2x-4$; б) $y=5x-16$; в) $y=2x+1$; г) $y=5x+9$. **43.29.** а) $y=-6x+18$, $y=6x+18$; б) $y=27x-81$; в) $y=-4x$, $y=8x+16$, $y=8x-16$; г) $y=0$, $y=-x+1$. **43.30.** а) $y=5x-16$; $y=-5x-1$; б) $y=x-4$, $y=-x+9$. **43.31.** а) $x=1$; б) $x=-\frac{1}{4}$; в) $x=\frac{3}{8}$; г) $x=-0{,}5$. **43.32.** а) $y=x-\frac{8}{3}$, $y=x-\frac{4}{3}$; б) $y=9x-20$, $y=9x+16$. **43.33.** а) $y=2x+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$, $y=2x-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$; б) $y=x$. **43.34.** а) $x=3$; б) $x_1=0$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}$; в) $x=1$; г) $x_1=0$, $x_2=0{,}6$. **43.35.** а) $x=\pi+2\pi n$; б) $x=\frac{\pi}{3}n$; в) $x=\pi n$; г) $x=\pi+2\pi n$. **43.36.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; б) 0; в) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; г) 0. **43.37.** а) $y=-x$, $y=20\frac{5}{6}-x$; б) $y=1\frac{1}{3}-x$; $y=-x$. **43.38.** а) $y=14-x$, $y=-x-2$; б) $y=-x-5$, $y=-x-9$. **43.39.** а) $y=-x-11$; б) $y=1-x$. **43.40.** а) $y=\frac{\pi}{2}-x$; б) $y=\frac{\pi}{2}-x$. **43.41.** а) $x_1=0$, $y=x+1$, $x_2=2$, $y=x-3$; б) $x_1=-3$, $y=-x-1$, $x_2=-1$, $y=-x+3$. **43.42.** а) $y=\sqrt{3}x-\frac{16\sqrt{3}}{3}$, $y=\sqrt{3}x+\frac{16\sqrt{3}}{3}$; б) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **43.43.** а) (0; 1), (0; 21); б) (0; 0), (0; 12). **43.44.** $y=x^2-3x+1$. **43.45.** а) $y=-6x-8$, $y=2x$; б) $y=2x$, $y=-2x$; в) $y=4x-3$, $y=-4x-3$; г) $y=1$, $y=-4x-3$. **43.46.** а) $y=8-7x$, $y=-11x+12$; б) $y=-9x+9$, $y=-5x+9$. **43.47.** а) $y=-0{,}1x+2{,}8$, $y=-0{,}5x+2$; б) $y=-0{,}5x+2$. **43.48.** а) $y=2x-1$, $y=0{,}4x+2{,}2$; б) $y=x+1$, $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$. **43.49.** а) $a=\frac{\pi}{4}n$, $a=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$; б) $a=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $a=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$. **43.50.** а) $y=3-2x$; б) $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$. **43.51.** а) $y=3x-2$; б) $y=\frac{27}{4}x+\frac{27}{4}$. **43.52.** а) $B(0;\ 3{,}5)$; б) $y=x-3$, $y=-x-3$. **43.53.** а) $B(0;\ 0)$; б) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$. **43.54.** а) $\left(-\frac{3}{4};\ -25\right)$; б) (17; 204). **43.55.** а) $p=0{,}5$; б) $p=-1$. **43.56.** а) (1; –1);

б) не является. **43.57.** а) $\frac{6}{7}$; б) $\frac{4}{5}$. **43.58.** а) $a = 2$; б) $a = 0$. **43.59.** а) 1; б) $1 - \sqrt{3}$. **43.60.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{10}$. **43.61.** а) -1; б) 4. **43.62.** а) $y = x$; б) $(0; -4)$. **43.63.** а) $\operatorname{arctg} 3$; б) $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **43.65.** а) $\left(0; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$; б) $y = -\frac{1}{4}$. **43.66.** а) -1; 2; б) 10. **43.67.** а) 5; б) 9. **43.68.** а) $b = 2$; $c = -3$; б) $a = 3$; $b = -5$; $c = 2$. **43.69.** $S = 2a^2$. **43.70.** $y = 2ax - a^2$ — уравнение касательной, $x = \frac{a}{2}$ — абсцисса точки пересечения.

§ 44

44.20. а) Возрастает на $(-\infty; +\infty)$; б) возрастает на $[-5; 3]$, убывает на $(-\infty; -5]$ и на $[3; +\infty)$; в) возрастает на $(-\infty; -2]$ и на $[3; +\infty)$, убывает на $[-2; 3]$; г) возрастает на $[-1; 1]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$. **44.21.** а) Возрастает на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ и на $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) убывает на $(-\infty; -1{,}5)$ и на $(-1{,}5; +\infty)$. **44.22.** а) Возрастает на $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) возрастает на $\left[\frac{15}{16}; 1\right]$, убывает на $\left(-\infty; \frac{15}{16}\right]$; в) убывает на $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$; г) возрастает на $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, убывает на $[1; +\infty)$. **44.23.** а) Возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$; б) возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$. **44.24.** а) Возрастает на $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right]$; б) возрастает на $\left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ и на $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right]$, убывает на $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right]$ и на $\left[\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$; в) возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right]$, убывает на $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$; г) возрастает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$ и на $\left(\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right)$ и на $\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$. **44.25.** а) Возрастает на $[4; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2]$; б) возрастает на $\left[\frac{1}{2}; 1\frac{1}{4}\right]$, убывает на $\left[1\frac{1}{4}; 2\right]$. **44.26.** а) Возрастает на $[0; 1]$, убывает на $[-1; 0]$; б) убывает на $[0; +\infty)$; в) убывает на $[0; 1]$; г) возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$. **44.27.** а) Возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[-1; 1]$; б) возрастает на $[1; 2]$, убывает на $(-\infty; 1]$ и на $[2; +\infty)$. **44.28.** а) Возрастает на $[-2; 0]$ и на $[4; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2]$ и на $[0; 4]$; б) возрастает на $[-1; 1]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$. **44.29.** а) Возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $[-1; 1]$; б) возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[0; 1]$; в) возрастает на $(-\infty; -5]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $[-5; 1]$; г) возрастает на $(-\infty; -2]$ и на $[0; 2]$, убывает на $[-2; 0]$ и на $[2; +\infty)$. **44.31.** а) $a \geqslant 0$; б) $-\sqrt{5} \leqslant a \leqslant \sqrt{5}$. **44.32.** а) $a \geqslant 1$; б) $a \leqslant -4$. **44.33.** а) $b \leqslant -\dfrac{1}{3}$; б) $b \leqslant 0$; в) ни при каких b; г) $b \geqslant 0$. **44.34.** а) -2; б) $-2{,}5 < a \leqslant -1{,}5$; $a \geqslant 1{,}5$; в) 2; г) $a \leqslant -0{,}5$; $a \geqslant 3{,}5$. **44.35.** а) $a \leqslant -1$; $a \geqslant 2$; б) $a \leqslant -1{,}5$; $a \geqslant 1$. **44.36.** а) b, d; б) c; в) a, 0; г) нет таких точек. **44.37.** а) e; б) a, b; в) b, c; г) a, b, c, d, e. **44.38.** а) При $a = \pm 3$; б) при $a = \pm 5$. **44.45.** а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **44.48.** а) $x = \dfrac{7}{4}$ — точка минимума; б) $x = -2{,}5$ — точка максимума; в) $x = \dfrac{3}{4}$ — точка минимума; г) $x = -2$ — точка максимума. **44.49.** а) $x = 2$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; б) $x = -3$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; в) $x = -\dfrac{1}{3}$ — точка максимума, $x = 5$ — точка минимума; г) $x = 7$ — точка минимума, $x = 0$ — точка максимума. **44.50.** а) $x = -0{,}6$ — точка максимума, $x = 0{,}6$ — точка минимума; б) $x = -1$, $x = 4$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума; в) $x = -5$, $x = 5$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума; г) $x = -3$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума. **44.51.** а) $x = -2$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума; б) $x = -3$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума. **44.52.** а) $x = 3$ — точка минимума; б) $x = 2$ — точка максимума; в) $x = 8{,}5$ — точка максимума; г) $x = 1{,}4$ — точка максимума. **44.53.** а) $x = -\dfrac{\pi}{6}$ — точка минимума, $x = -\dfrac{5\pi}{6}$ — точка максимума; б) $x = \dfrac{5\pi}{3}$ — точка минимума, $x = \dfrac{7}{3}\pi$ — точка максимума. **44.54.** а) $x = -3$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; б) $x = -3$ — точка максимума; в) $x = 0$ и $x = 3$ — точки минимума; $x = 2$ — точка максимума; г) нет таких точек. **44.55.** а) $x = 0$ — точка минимума; б) нет; в) $x = 0$ — точка максимума; г) нет. **44.56.** а) $y' = (x + 2)^2 \geqslant 0$ при всех x; б) $y' = -x^2 + 3x - 3 < 0$ при всех x; в) $y' = x^4 + x^2 + 1 > 0$ при всех x; г) $y' = -5x^4 - 3x^2 \leqslant 0$ при всех x. **44.57.** а) 8; $x = -\dfrac{7}{16}$ — точка минимума; б) -2; $x = \dfrac{7}{4}$ — точка максимума; в) -1; $x = 3{,}5$ — точка максимума; г) $a = -0{,}1$; $x = 35$ — точка максимума. **44.58.** а) Нет; б) $x = 0$ — точка максимума; $x = \dfrac{1}{3}$ и $x = 2$ — точки минимума; $x = 2$ — точка минимума. **44.59.** а) Возрастает на $\left[-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, убывает на

$\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$, $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$ — точки минимума, $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$ — точки максимума; б) убывает на $\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$, возрастает на $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7}{6}\pi+2\pi n\right]$, $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$ — точки минимума, $x=\frac{7}{6}\pi+2\pi n$ — точки максимума; в) убывает на $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]$, возрастает на $\left[-\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$ — точки максимума, $x=\frac{3}{4}\pi+2\pi n$ — точки минимума; г) возрастает на R. **44.60.** а) Убывает на $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, возрастает на $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$ — точки минимума, $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n$ — точки максимума; б) убывает на $\left[\frac{\pi}{3}+4\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+4\pi n\right]$, возрастает на $\left[-\frac{7\pi}{3}+4\pi n;\ \frac{\pi}{3}+4\pi n\right]$, $x=\frac{\pi}{3}+4\pi n$ — точки максимума, $x=\frac{5\pi}{3}+4\pi n$ — точки минимума. **44.61.** а) Убывает на $(-\infty;\ 3]$, возрастает на $[3;\ +\infty)$, $x=3$ — точка минимума; б) возрастает на $(-\infty;\ 0)$ и на $[1;\ +\infty)$, убывает на $(0;\ 1]$, $x=1$ — точка минимума; в) убывает на $(-\infty;\ -3]$ и на $\left[-\frac{1}{2};\ 2\right]$, возрастает на $\left[-3;\ -\frac{1}{2}\right]$ и на $[2;\ +\infty)$, $x=-3$ и $x=2$ — точки минимума, $x=-\frac{1}{2}$ — точка максимума; г) возрастает на $[-1;\ 0]$ и на $[1;\ +\infty)$, убывает на $(-\infty;\ -1]$ и на $[0;\ 1]$, $x=-1$, $x=1$ — точки минимума, $x=0$ — точка максимума. **44.62.** а) Убывает на $\left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right]$, на $[-1;\ 0]$ и на $\left[1;\ \sqrt{3}\right]$, возрастает на $\left[-\sqrt{3};\ -1\right]$, на $[0;\ 1]$ и на $\left[\sqrt{3};\ +\infty\right)$, $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ — точки минимума, $x=-1$, $x=1$ — точки максимума; б) возрастает на $\left[-1;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, на $\left[0;\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ и на $[1;\ +\infty)$, убывает на $(-\infty;\ -1]$, на $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\ 0\right]$ и на $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\ 1\right]$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$ — точки минимума, $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точки максимума. **44.64.** г) Возрастает на $[-1;\ 1]$, убывает на $(-\infty;\ -1]$ и на $[1;\ +\infty)$, $x=-1$ — точка минимума, $x=1$ — точка максимума. **44.65.** г) Возрастает на $(-\infty;\ -1]$ и на $[1;\ +\infty)$, убывает на $[-1;\ 1]$, $x=-1$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума. **44.66.** г) Возрастает на $(-\infty; -3]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $[-3; 1]$, $x = -3$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума. **44.67.** г) Возрастает на $[-1; 1]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$, $x = -1$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума. **44.68.** г) Возрастает на $(-\infty; 1,5]$, убывает на $[1,5; +\infty)$, $x = 1,5$ — точка максимума. **44.69.** а) 2; б) 1; в) 1; г) 1. **44.70.** а) 0; б) 0. **44.71.** а) 1; б) 2. **44.74.** а) π; б) 0.

§ 45

45.13. а) 3; б) 1; в) 3; г) 1. **45.14.** а) 1 корень, если $a > -3$; 2 корня, если $a = -3$; 3 корня, если $a < -3$. **45.15.** а) 3; б) -1. **45.16.** 0; 0,5.

§ 46

46.1. а) 255; -1; б) 34; 1; в) 23; -4; г) 8; -154. **46.2.** а) $y_{\text{наиб}} = 4$; $y_{\text{наим}} = -23$; б) $y_{\text{наиб}} = -9$; $y_{\text{наим}} = -9993$; в) $y_{\text{наиб}} = 5$; $y_{\text{наим}} = -1$; г) $y_{\text{наиб}} = 31\,246$; $y_{\text{наим}} = 124$. **46.3.** а) $y_{\text{наиб}} = -2$; $y_{\text{наим}} = -4$; б) $y_{\text{наиб}} = 1,5$; $y_{\text{наим}} = -0,5$; в) $y_{\text{наиб}} = 0$; $y_{\text{наим}} = -1$; г) $y_{\text{наиб}} = 7$; $y_{\text{наим}} = 1$. **46.4.** а) $y_{\text{наиб}} = \sqrt{2}$; $y_{\text{наим}} = 0$; б) $y_{\text{наиб}} = \sqrt{2}$; $y_{\text{наим}} = 1$; в) $y_{\text{наиб}} = \sqrt{2}$; $y_{\text{наим}} = 0$; г) $y_{\text{наиб}} = \sqrt{2}$; $y_{\text{наим}} = 0$. **46.5.** а) $y_{\text{наиб}} = 4$; $y_{\text{наим}} = 1$; б) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 3$. **46.6.** а) $y_{\text{наиб}} = 7$; $y_{\text{наим}} = -3$; б) $y_{\text{наиб}} = 6$; $y_{\text{наим}} = -4$. **46.7.** а) $y_{\text{наиб}} = 24$; $y_{\text{наим}} = 12$; б) $y_{\text{наиб}} = 10$; $y_{\text{наим}} = 5$; в) $y_{\text{наиб}} = 16$; $y_{\text{наим}} = 2$; г) $y_{\text{наиб}} = 10$; $y_{\text{наим}} = 2$. **46.8.** а) $y_{\text{наиб}} = 1$; $y_{\text{наим}} = -2$; б) $y_{\text{наиб}} = 0$; $y_{\text{наим}} = -4$; в) $y_{\text{наиб}} = 5$; $y_{\text{наим}} = -4$; г) $y_{\text{наиб}}$ не существует; $y_{\text{наим}} = -4$. **46.9.** а) $y_{\text{наиб}} = 28$; $y_{\text{наим}} = 3$; б) $y_{\text{наиб}} = 9$; $y_{\text{наим}} = -3$; в) $y_{\text{наиб}} = 16$; $y_{\text{наим}} = -2$; г) $y_{\text{наиб}} = -7$; $y_{\text{наим}} = -199$. **46.10.** а) $y_{\text{наиб}} = 19$; $y_{\text{наим}} = -35$; б) $y_{\text{наиб}} = 35$; $y_{\text{наим}} = 15$; в) $y_{\text{наиб}} = 19$; $y_{\text{наим}} = -93$; г) $y_{\text{наиб}} = 19$; $y_{\text{наим}} = 15$. **46.11.** а) $y_{\text{наиб}} = 173$; $y_{\text{наим}} = -2$; б) $y_{\text{наиб}} = -43$; $y_{\text{наим}} = -72$; в) $y_{\text{наиб}} = 173$; $y_{\text{наим}} = 45$; г) $y_{\text{наиб}} = -2$; $y_{\text{наим}} = -72$. **46.12.** а) $y_{\text{наиб}} = 4$; $y_{\text{наим}} = -3$; б) $y_{\text{наиб}} = -12$; $y_{\text{наим}} = -28$; в) $y_{\text{наиб}} = 4$; $y_{\text{наим}} = -28$; г) $y_{\text{наиб}} = 4$; $y_{\text{наим}} = -28$. **46.13.** а) $y_{\text{наиб}} = 20$; $y_{\text{наим}} = -7$; б) $y_{\text{наиб}} = 4$; $y_{\text{наим}} = -124$; в) $y_{\text{наиб}} = 121$; $y_{\text{наим}} = -44$; г) $y_{\text{наиб}} = 148$; $y_{\text{наим}} = -124$. **46.14.** а) $y_{\text{наиб}} = 6$; $y_{\text{наим}} = 5$; б) $y_{\text{наиб}} = -3$; $y_{\text{наим}} = -4$. **46.15.** а) $y_{\text{наиб}} = \dfrac{\pi}{4} + 1$; $y_{\text{наим}} = \dfrac{3\pi}{4} - 1$; б) $y_{\text{наиб}} = \dfrac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$; $y_{\text{наим}} = -\pi$; в) $y_{\text{наиб}} = \sqrt{3} + \dfrac{\pi}{6}$; $y_{\text{наим}} = -\dfrac{\pi}{2}$; г) $y_{\text{наиб}} = \dfrac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$; $y_{\text{наим}} = 0$. **46.16.** а) $y_{\text{наиб}} = 0$; $y_{\text{наим}} = -27$; б) $y_{\text{наиб}} = 0$; $y_{\text{наим}} = -4$; в) $y_{\text{наиб}} = 50$; $y_{\text{наим}} = 0,875$; г) $y_{\text{наиб}} = \dfrac{5}{8}$; $y_{\text{наим}} = -\dfrac{5}{8}$. **46.17.** а) $y_{\text{наиб}} = 21$; $y_{\text{наим}} = 5$; б) $y_{\text{наиб}} = 71$; $y_{\text{наим}} = -10$; в) $y_{\text{наиб}} = 18,25$; $y_{\text{наим}} = 17$; г) $y_{\text{наиб}} = 6\dfrac{1}{12}$; $y_{\text{наим}} = -11\dfrac{1}{6}$. **46.18.** а), б) $y_{\text{наиб}} = 6$; $y_{\text{наим}} = -0,25$; в) $y_{\text{наиб}} = 72$; $y_{\text{наим}} = 16$; г) $y_{\text{наиб}} = 135$; $y_{\text{наим}} = 27$. **46.19.** а) $y_{\text{наиб}} = 21$; $y_{\text{наим}} = -\dfrac{40}{27}$; б) $y_{\text{наиб}} = 10$; $y_{\text{наим}} = 5 - 4\sqrt{2}$. **46.20.** а) $y_{\text{наиб}} = 8$; $y_{\text{наим}} = 1\dfrac{3}{4}$; б) $y_{\text{наиб}} = 17$; $y_{\text{наим}} = -3$.

46.21. а) $y_{наиб} = 1$; $y_{наим} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $y_{наиб} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; $y_{наим} = -1$. **46.22.** а) $y_{наиб} = 0$; $y_{наим} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$; б) $y_{наиб} = 1$; $y_{наим} = -\frac{1}{8}$. **46.23.** а) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = -\frac{5}{27}$; б) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = -1$; в) $y_{наиб} = 0$; $y_{наим}$ не существует; г) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = 0$. **46.24.** а) $y_{наиб} = -2$; $y_{наим}$ не существует; б) $y_{наиб} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y_{наим} = -2$; в) $y_{наиб} = -2$; $y_{наим}$ не существует; г) $y_{наиб} = 3{,}5$; $y_{наим}$ не существует. **46.25.** а) $y_{наиб} = 2$; $y_{наим}$ не существует; б) $y_{наиб} = \frac{1}{4}$; $y_{наим} = 0$; в) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = -2$; г) $y_{наиб} = 0$; $y_{наим} = -\frac{1}{4}$. **46.26.** а) −5; б) 0. **46.27.** а) 5,5; б) 1; в) 5; г) 4. **46.28.** а) 7; б) −0,1; в) 3; г) $\frac{2}{3}$. **46.29.** а) 4; б) 6; в) −9; г) 4; −8. **46.30.** а) $y_{наиб} = 5$; $y_{наим} = 0$; б) $y_{наиб} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$; $y_{наим} = 0$; в) $y_{наиб} = 4$; $y_{наим} = 0$; г) $y_{наиб} = 3{,}5\sqrt{3}$; $y_{наим} = 0$. **46.31.** а) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = 0$; б) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = 1$; в) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = 0$; г) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **46.32.** а) 2; б) 1. **46.33.** а) 3; б) 3. **46.34.** а) −4; б) −0,25; в) 9; г) −16. **46.35.** а) $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$; б) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. **46.36.** а) $\left[-\frac{4\sqrt{6}}{9}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{9}\right]$. **46.37.** [−3; −1]. **46.38.** а) 9; б) 15. **46.39.** а) $n = -\frac{3}{4}$; б) $n = 4 - 2\sqrt{3}$. **46.41.** 926. **46.42.** 1, $-2\sqrt{2} - 2$. **46.43.** [−23; 9]. **46.44.** а) 12; 12; б) 22; 22. **46.45.** а) −5; 5; б) −49; 49. **46.46.** а) −18; 18; б) −14; 14. **46.47.** а) 2; 1; б) $1\frac{1}{4}$; $3\frac{3}{4}$. **46.48.** а) 14 см; 14 см; б) 18 см, 18 см. **46.49.** а) 50 м × 50 м; б) 60 м × 60 м. **46.50.** а) 4 см × 4 см; б) 8 см × 8 см. **46.51.** а) 50 м × 50 м. **46.52.** 32 см^2. **46.53.** а) 0,8; б) −4. **46.54.** а) 2; б) 1. **46.55.** а) (1; 1); (−1; 1); б) (4; 2). **46.56.** 30 см. **46.57.** а) 6000; б) 108. **46.58.** а) 21; б) 32,4. **46.59.** $\sqrt{ab}$. **46.60.** 3 ч 44 мин. **46.61.** 4 дм, 4 дм, 2 дм. **46.62.** 7 м, 7 м, 7 м. **46.63.** $4\sqrt[3]{5}$ м, $6\sqrt[3]{5}$ м, $\frac{24\sqrt[3]{5}}{5}$ м. **46.64.** $\frac{d\sqrt{3}}{3}$. **46.65.** $\frac{p\sqrt{3}}{3}$. **46.66.** $\frac{p}{6}$. **46.67.** $\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$.

§ 47

47.1. а) 42; б) 20; в) 24; г) 14. **47.2.** а) 42; б) 7; в) 24; г) 20. **47.3.** а) 100; б) 90; в) 180; г) 90. **47.4.** а) 108; б) 54; в) 84; г) 324. **47.5.** а) 100000;

б) 32 768; в) 32; г) 8192. **47.6.** а) 512; б) 64; в) 16; г) 192. **47.7.** б) 3; в) 6; г) Эшкин будет в четырёх вариантах. **47.8.** б) 4. **47.9.** б) 1; в) 3. **47.10.** б) 2; в) 8; г) 3. **47.11.** а) 54; б) 5184; в) $\frac{1}{7}$; г) $\frac{5}{16}$. **47.12.** а) 1; б) 0. **47.13.** а) 2; б) 3; в) 6; г) 24. **47.14.** а) 8; б) 15; в) 6; г) 13. **47.16.** а) 7; б) 4; в) 7; г) 3. **47.17.** а) $n \geqslant 3$; б) $n \geqslant 4$. **47.18.** а); б); в); г) Начиная с указанного номера n, левая часть растёт быстрее правой части. **47.20.** а) 120; б) 288; в) 432; г) 144. **47.21.** а) $(6!)^2$; б) $(5!)^2$; в) $(6!)^2$; г) $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3)^2$. **47.22.** а) 120; б) 14 400; в) 720; г) 2880. **47.23.** а) 7!; б) 6!; в) $7! \cdot 3! = 30\,240$; г) $7! \cdot 3! \cdot 4! = 725\,760$. **47.24.** а) $5! \cdot 4! \cdot 3! = 17\,280$; б) 17 280.

§ 48

48.1. а) 12; б) 13; в) 12; г) 15. **48.2.** а) $\frac{n(n-1)}{2}$; б) $\frac{n(n-3)}{2}$; в) $n-2$; г) $(n-2)(n-3)$. **48.3.** а) 110; б) 56; в) 82; г) 55; 28. **48.4.** а) 100; б) 10; в) 94; г) 18. **48.8.** Упростите выражение: а) $\frac{(n+1)n(n-1)}{3}$; б) $\frac{n(n-1)}{2}$.

48.9. а) $C_{17}^3 < C_{18}^4$; б) $C_{18}^4 < C_{19}^5$; в) $C_{19}^5 < C_{18}^6$; г) $C_n^7 < C_{n+1}^8$ при $n > 7$, $C_n^7 = C_{n+1}^8$ при $n = 7$. **48.10.** а) 8; б) 6; в) 7; г) 4. **48.11.** а) $x = 9$ или $x = 10$; б) $x = 11$. **48.12.** а) 8; б) 27; в) 31; г) 7. **48.13.** а) 15; б) 5; в) 8; г) 12. **48.14.** а) 210; б) 35; в) 15; г) 100. **48.15.** а) 32 760; б) 792; в) 120; г) 240. **48.16.** а) 376 992; б) 32; в) 126; г) 504. **48.17.** а) 14 112; б) 10 976; в) 7056; г) 280. **48.18.** а) $y = \frac{x}{6(x-3)}$; в) 8; г) 54. **48.19.** а) $y = 6x(x-1)$; в) 10; г) 33. **48.20.** а) $y = 24\left(1 - \frac{4}{x+2}\right)$ — монотонно возрастает; в) 23; г) 24.

48.21. а) 7; б) 8; в) 12; г) 3. **48.23.** а) 8; б) 16; в) 128. **48.25.** а) 108; б) −720; в) 8; г) $-\frac{4}{9}$. **48.26.** а) $10x^8$; б) $120x^4$; в) $210x^{-2}$; г) 252. **48.27.** а) 60; б) 5; в) 61 236; г) 24 310. **48.28.** а) 10; б) 252; в) один; г) 9; 126; два. **48.29.** а) $k = 2$ или $k = 3$; б) 8; в) $k = 30$ или $k = 31$; г) 500. **48.30.** б) 999 001; в) 9802; г) указание: найти номер, начиная с которого $\frac{1}{q^n} = \left(1 + \frac{1-q}{q}\right)^n > \frac{1}{a}$.

§ 49

49.1. а) 0,2; б) 0,077; в) 0,088; г) 0,966. **49.2.** а) 0,244; б) 0,067; в) 0,044; г) 0,088. **49.3.** а) 0,989; б) 0,01; в) 0,0026; г) 0,044. **49.4.** а) 0,25; б) 0,25; в) 0,107; г) 0,321. **49.5.** а) 0,36; б) 0,52; в) 0,04; г) 0,56. **49.6.** а) 0,1; б) 0,7; в) 0,15; г) 0,75. **49.7.** а) $\frac{1}{29}$; б) $\frac{27}{29}$; в) $\frac{9}{29}$; г) $\frac{19}{29}$. **49.8.** а) 0,833; б) 0,833; в) 0,167; г) 0,222. **49.9.** а) 10; б) 8; в) 12; г) 29. **49.10.** а) 20; б) 24; в) 6; г) 48. **49.11.** а) 200; б) 162; в) 100; г) 99. **49.12.** а) 4; б) 8; в) 4; г) 8.

49.13. а) Это событие B; б) есть ученик, сдавший экзамен, но есть и ученик, не сдавший экзамен; в) это событие B; г) это событие B. **49.14.** а) Все трое не сдали экзамен; б) или все трое сдали экзамен, или все трое не сдали экзамен; в) никто не сдал экзамен; г) ни один ученик не сдал экзамен. **49.15.** а) Это цифра 8; б) это цифра 9; в) это цифра 9; г) невозможное событие. **49.17.** а) 0,119; б) 0,476; в) 0,476; г) 0,952. **49.18.** а) $\frac{3n}{4(2n-1)}$; б) указание: постройте график функции из а); в) 0,375; г) 9.

49.19.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(n)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{5}{126}$	0	0	0	0

49.20.

n	0	1	2	3	4	5	6
$p(n)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$	0

49.21. а) 0,051; б) 0,338; в) 0,662; г) 0,974. **49.22.** а) $\frac{5n^2-7n}{4(2n-1)(2n-3)}$; б) указание: исследуйте функцию из а) на монотонность; в) 0,3125; г) 6. **49.23.** а) 0,125; б) 0,125; в) 0,375; г) 0,875. **49.24.** а) 0,0625; б) 0,0625; в) 0,25; г) 0, 9375. **49.25.** а) $1-2^{-n}$; б) возрастает; в) 1; г) 10. **49.26.** а) 0,729; б) 0,271; в) 0,125; г) 0,875. **49.27.** а) $1-0{,}9^n$; б) возрастает; в) 1; г) 7. **49.28.** а) 0,303; б) 0,211; в) $\left(\frac{23}{33}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{10}{33}\right)$; г) 0.

49.29. а) $0{,}9^{n-1}0{,}1$; б) 0;

в)

n	1	2	3	4	5	6	7
$p(n)$	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,06561	0,059049	0,0531441

г) 1. **49.30.** а) 0,5; б) 0,8; в) 0,6; г) 0,1.

Оглавление

ГЛАВА 4. **Тригонометрические уравнения**

ГЛАВА 5. **Преобразование тригонометрических выражений**

ГЛАВА 6. **Комплексные числа**

ГЛАВА 7. **Производная**

ГЛАВА 8. **Комбинаторика и вероятность**